I. megoldás. Ha köbre emeljük az eredeti egyenlet mindkét oldalát és a bal oldalt az

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

azonosság szerint alakítjuk át, akkor rendezés után a

$$3\sqrt[3]{2x+1}\sqrt[3]{4-x}\ (\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{4-x}) = -(x+8) \tag{2}$$

egyenlethez jutunk. Itt (1) alapján a bal oldali zárójelben $-\sqrt[3]{3}$ áll, és így

$$3\sqrt[3]{3(2x+1)(4-x)} = x+8. \tag{3}$$

Ismét köbre emelve és rendezve a harmadfokú

$$x^3 + 186x^2 - 375x + 188 = 0 \tag{4}$$

egyenletet kapjuk. A bal oldalon az együtthatók összege nulla, az egyenletnek tehát gyöke az 1, így az $(x-1)$ tényező kiemelése után a kapott másodfokú polinomot szorzattá alakítva végül az

$$(x-1)^2(x+188) = 0 \tag{5}$$

egyenlet adódik. Ennek két gyöke van, az 1 és a -188. Az eredeti egyenletnek az 1 nem megoldása, hiszen ha $x=1$, akkor a bal oldal pozitív, a jobb oldal pedig negatív. A (-188) megoldása az (1) egyenletnek.

Megjegyzés. Felmerül a kérdés, miért jelenik meg a „hamis gyök”. Két szám pontosan akkor egyenlő, ha a köbük az, így az egyenletek köbre emelése (a négyzetre emeléssel ellentétben) ekvivalens átalakítás. Tehát (1) és (2) ekvivalens egyenletek, csakúgy, mint (3) és (4). A hamis gyököt eszerint csak akkor kaphattuk, amikor a (2) egyenletbe visszahelyettesítettük az eredeti (1) összefüggést: ez nem szükségképpen ekvivalens átalakítás. Vegyük szemügyre általában: ha az

$$u(x) + v(x) - c = 0$$

helyett a köbreemelés és az $u(x) + v(x) = c$ „visszahelyettesítés” után kapott

$$u^3(x) + v^3(x) + 3u(x)\cdot v(x)\cdot c - c^3 = 0$$

egyenletet oldjuk meg, akkor az

$$u^3 + v^3 - c^3 + 3uvc = \frac{1}{2}(u+v-c)[(u-v)^2 + (u+c)^2 + (v+c)^2] \tag{6}$$

azonosságból látható, hogy a második tényező úgy is lehet nulla, hogy az első – amely az eredeti (1) egyenlet rendezés után kapott bal oldala – nem az. Ehhez az kell, hogy létezzék olyan x_0, amelyre $u(x_0) = v(x_0) \neq 0$, és az egyenlet jobb oldalán álló c konstans ennek a közös helyettesítési értéknek az ellentettje legyen.

Éppen ilyennek készült az (1) egyenlet, ahol

$$u(x) = \sqrt[3]{2x+1}, \quad v(x) = \sqrt[3]{4-x} \quad \text{és} \quad c = -\sqrt[3]{3}.$$

Itt $x_0 = 1$-re valóban $u(x_0) = v(x_0) = -c \neq 0$, így ha $x_0 = 1$, akkor (6)-ban a második tényező nulla, az első pedig nem az. Látható, hogy minden más, $-\sqrt[3]{3}$-tól különböző c értékre a visszahelyettesítéses módszer az eredetivel ekvivalens egyenletre vezet.

Az alábbi megoldás elkerüli a „kritikus”visszahelyettesítést.

II. megoldás. Az $u = \sqrt[3]{2x+1}$ és a $v = \sqrt[3]{4-x}$ ismeretleneket bevezetve az

$$u + v = -\sqrt[3]{3},$$
$$u^3 + 2v^3 = 9$$

egyenletrendszert kapjuk.

Az első egyenletből $u = -(v + \sqrt[3]{3})$. Köbre emelve és u^3 kapott alakját a második egyenletbe helyettesítve a

$$v^3 - 3\sqrt[3]{3}v^2 - 3\sqrt[3]{9}v - 4\sqrt[3]{27} = 0 \tag{7}$$

egyenletet kapjuk.

Az egyenlet bal oldala

$$v^3 - (\sqrt{3})^3 - 3\sqrt[3]{3}(v^2 + \sqrt[3]{3}v + (\sqrt[3]{3})^2).$$

A két köb különbségét szorzattá alakítva:

$$v^3 - (\sqrt[3]{3})^3 = (v - \sqrt[3]{3})(v^2 + \sqrt[3]{3}v + (\sqrt[3]{3})^2).$$

Az azonosan pozitív $(v^2+\sqrt[3]{3}v+(\sqrt[3]{3})^2)$ tényező kiemelhető, és így végül a

$$(v^2+\sqrt[3]{3}v+(\sqrt[3]{3})^2)\cdot(v-\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{3})=0$$

egyenletet kapjuk, ahonnan

$$v=\sqrt[3]{4-x}=4\sqrt[3]{3},$$

és így $x=-188$.

Mivel most ekvivalens átalakításokat végeztünk, a -188 az eredeti (1) egyenletnek is megoldása.