Az AO egyenes felezi az $\alpha = BAC$ szöget, így $\alpha/2$ megszerkeszthető az AOE derékszögű háromszögből, ahol E a beírt k_0 kör érintési pontja az AB oldalon. α ismeretében megszerkeszthető a háromszög köréírt k kör átmérőjének a hossza, mert $2R = \dfrac{AM}{|\cos\alpha|}$ (kivéve, ha α éppen derékszögnek adódik). Legyen ugyanis B átellenes pontja a k körön B^*. Ekkor a B^*AMC négyszög oldalai páronként párhuzamosak, mert – Thalész tételét felhasználva – B^*A és CM merőlegesek AB-re, másrészt B^*C és AM merőlegesek CB-re. Innen

$$AM = B^*C = BB^* \cos BB^*C\sphericalangle = 2R\,|\cos\alpha|,$$

ugyanis a B^*BC derékszögű háromszögben $BB^*C\sphericalangle = \alpha$ vagy $180^\circ - \alpha$ aszerint, hogy B^* a BC egyenesnek A-t tartalmazó partján van, vagy a másik partján (1. a, b ábra).

1988-04-156-1.eps

1.a ábra

1988-04-156-2.eps

1.b ábra

Felvéve egy $2R$ átmérőjű k kört – legyen a középpontja K – és rajta a B, C pontokat úgy, hogy $BKC\sphericalangle = 2\alpha$ legyen, ezeket mindjárt a keresett háromszög csúcsainak tekintjük. Az A csúcs a nagyobbik BC íven lesz, ha $\alpha < 90^\circ$, különben a kisebbiken, az O középpont pedig mindig a BC egyenesnek az A-t tartalmazó partján. Legyen még a másik félsíkon levő BC ív felezőpontja D.

Az O-ként szóba jövő pontokat két mértani hely közös pontjaiként kapjuk. Ezek egyike nyilvánvalóan a BC-vel párhuzamos, tőle ϱ távolságban haladó g egyenes, – azon az F félsíkon, amelyiken O-t várjuk, – a másik a D pont körüli $DB = DC$ sugarú segédkörnek F-beli $\widehat{BC} = i$ íve. Az utóbbihoz belátjuk, hogy mindig $DB = DC$, vagy másképpen hogy a DOC háromszög O-nál és C-nél levő szögei egyenlők.

A $\widehat{BD}$, $\widehat{DC}$ ívek egyenlősége miatt ugyanis D-n átmegy az AO szögfelező, ezért $CDO\sphericalangle = CDA\sphericalangle = CBA\sphericalangle = \beta$, így a másik két szög összege $180^\circ - -\beta = \alpha + \gamma$, márpedig

$$OCD\sphericalangle = OCB\sphericalangle + BCD\sphericalangle = OCB\sphericalangle + BAD\sphericalangle = \frac{\gamma + \alpha}{2},$$

tehát ugyanennyi a $COD\sphericalangle$ is.

Ha a két mértani hely 2 pontot ad O céljára, ezek egyenrangúak, mert egymás tükörképei a DK átmérőre, elég az egyikkel foglalkoznunk. (Abból is adódik ez, hogy adatainkban a B és C csúcsok egyformán nem szerepelnek.) A DO egyenes kimetszi k-ból a háromszög hátralévő A csúcsát.

A szerkesztés végrehajtásában mindjárt α-t kapjuk, ha egyenlő szárú háromszöget szerkesztünk a $GH = 2\varrho$ alap fölé AO-val mint szárral és a harmadik csúcsra tüstént ráruházzuk az 1. ábrák B^* pontjának szerepét. (A szerkesztésnek ezt az első fázisát is mutatja az 1. ábra.) A B^*G szár B^*-on túli meghosszabbítására felmérjük a $B^*C = AM$ szakaszt, a szárra a C végpontban állított merőlegessel a B^*H egyenesből kimetszük a B pontot és a BB^* szakasz fölé Thalész-kört írunk, ez lesz k. A $GB^*H\sphericalangle = \alpha$ hegyes-, illetve tompaszög voltából kiolvassuk, hogy az A csúcs a BC oldalnak a kör K középpontját tartalmazó partján lesz-e, illetve a másikon. A kijelölt parton megszerkesztjük a g egyenest, a másik parton lévő $\widehat{BC}$ ív D felezőpontját kimetszük a K-n átmenő, BC-re merőleges egyenessel. A D körüli, DB sugarú körrel g-ből kimetszük O helyzetét, végül K-ból a DO egyenessel az A csúcsot.

Bebizonyítjuk, hogy az ABC háromszög megfelel a követelményeknek. Ennek A-ból és C-ből induló magasságvonalai megadják M magasságpontját. (Ez csak a bizonyításhoz szükséges.) Az előkészítő elemzés szerint (pontosabban mondva a tételek megfordítása szerint) $AM = B^*C$, tehát megfelelő. Az O körül ϱ sugárral írt k_0 kör érinti a BC oldalt, tehát az elemzés szerint az AC, AB oldalakat is. (A bizonyításnak erre a két elemére ezt szokás mondani: „*nyilvánvaló, hogy AM, ϱ és k_0 megfelelők.*")

Be kell még látnunk, hogy az ABC háromszögben AO egyenlő az előírt hosszúsággal. Legyen a GH szakasz felezőpontja J, ekkor az OAE és GB^*J derékszögű háromszögek egybevágók, mert $OE = \varrho = GJ$ és $OAE\sphericalangle = CAB\sphericalangle/2$, ez pedig mindkét változat szerint egyenlő a $GB^*H\sphericalangle$ felével, a $GB^*J\sphericalangle$-gel, tehát $OA = GB^*$, az előírásnak megfelelően.

Az OAE, illetve B^*GH háromszög létrejöveséhez szükséges és elegendő, hogy $\varrho < OA$ legyen. Folytatólag a B pont, vele $2R$ és a k kör csak akkor nem jön létre, ha $\alpha = 90^\circ$-nak adódik, azaz ha $OA = \sqrt{2}\varrho$, szükséges tehát az is, hogy $OA^2 - 2\varrho^2 \neq 0$ legyen. Derékszögű háromszögben M a derékszög csúcsába esik, azaz $AM = 0$. Ha az adat is ezt mondja, akkor fölösleges, viszont a feladat határozatlanná válik; $AM \neq 0$ esetén viszont ellentmondás van az adathármasban. (Az persze lehetséges, hogy a létrejövő háromszögben B-nél, vagy ami ugyanaz, C-nél derékszög legyen.)

Ezek után az O középpont akkor és csak akkor jön létre, ha a BC húr felező merőlegesének, a DK egyenesnek a húr és az i ív közé eső A_0L szakasza legalább akkora, mint a ϱ sugár. Mármost

$$A_0L = DL - DA_0 = DC - DC\sin\frac{\alpha}{2} = DC\left(1 - \frac{\varrho}{OA}\right),$$

ehhez a KDC háromszögből

$$DC = 2R\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{AM}{|\cos\alpha|}\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{AM}{OA\left|1 - 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right|} = \frac{AM\cdot OA\cdot\varrho}{|OA^2 - 2\varrho^2|},$$

tehát a harmadik feltétel az eredeti adatokkal kifejezve

$$A_0L \geq \varrho, \quad \text{azaz} \quad \frac{AM\cdot\varrho(OA-\varrho)}{|OA^2 - 2\varrho^2|} \geq \varrho,$$

amiből a harmadik adatra

$$AM \geq \frac{|OA^2 - 2\varrho^2|}{OA - \varrho}, \tag{1}$$

természetesen feltételezve a korábbi két feltétel teljesülését.

A három feltétel teljesülése esetén a feladatnak lényegében 1 megoldása van.

Megjegyzések. 1. Azt, hogy AM-re a másik két adat (1)-ben *alsó* korlátot szab, így is mondhatjuk: ha az AM szakasz és vele $2R$ „nem elég nagy”, akkor az AOE háromszög és a k_0 kör „nem fér bele” a k-ba. Ha (1)-ben egyenlőség áll fenn, akkor nyilván $AB = AC$ következik be, és M ráesik a k_0 kerületére.

2. Több dolgozat az i mértani helyet, mint a BC szakasz $180^\circ - OBC\sphericalangle - OCB\sphericalangle = 180^\circ - \dfrac{\beta+\gamma}{2}$ nyílású látókörívét szerkesztette meg, ez a látószög nyilvánvalóan tompaszög. Az ív középpontját D_1-gyel jelölve a homorú BD_1C szög 2-szer akkora: $360^\circ - (\beta+\gamma)$, tehát a BD_1C háromszög D_1-nél levő szöge $\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - BAC\sphericalangle$. Ebből adódik, hogy ABD_1C húrnégyszög, D_1 azonos D-vel. A fönti kis bizonyítás alapján rövidebben jutunk eredményhez.

3. A szerkesztéshez nem készítettünk előkészítő segédábrákat α, $2R$ céljára, mert a közbeeső részeredményeket sikerült közvetlenül a keletkezési helyükön felhasználni. Amikor ezért *szép*nek, sőt *célszerű*nek minősítjük a mutatott gondolatmenetet, a gyakorlati célt szolgáló szerkesztésekre is gondolunk. A fenti úton megtakarítottuk eredményeinknek más helyre való átmásolását, ami a gyakorlatban mindig a hibák elkerülhetetlen növekedésével járna együtt.

4. Szerkesztésünkkel reményünk lehetne, hogy elnyerjük a feladat *geometrografikus megoldásának* címét. Az 1900-as évek táján divatos irányzat volt minél rövidebb megoldást keresni a szerkesztési feladatokra. Megszámlálták a megrajzolt egyeneseket és köröket, sőt még a segédlépéseketis (mint pl. körző hegyének beszúrása tetszőleges pontba egyszerűbb, mint egy adott, vagy közben kapott pontba; vagy hogy egyenes megrajzolása előtt 2 pontjához kell odailleszteni a vonalzót). Ezekből az elemekből jött össze a szerkesztés egyszerűségét jellemző szám, és az a szerkesztés lett egy feladat geometrografikus megoldása, amelyre ez a szám a legkisebb. Fönt pl. α szerkesztésében megtakarítottunk egy szakaszfelezést és egy Thalész-kört azzal, hogy az OAE háromszöget gondolatban OE-re tükröztük.

A GC és HB egyenesek „helyben tartása” még csak a kezdete a takarékoskodásnak, ügyeskednünk kell a B^*C-re merőleges CB-vel, valamint a g egyenessel is. Előbb szerkesztjük K-t és abból k-t, hogy a C kijelöléséhez leírt, B^* közepű, AM sugarú körívet kihasználhassuk a B^*C húr felező merőlegeséhez is. Ezt – és más ilyen köröket – röviden így jelölve: $B^*(AM)$, a GB^* egyenesen kapott C-hez is megrajzoljuk a $C(AM)$ kört, így az ezen segédkör-pár metszéspontjait (segédpontokat) összekötő egyenes HB^*-ból kimetszi K-t, majd a $k = K(KB^*)$ kör HB^*-ból B-t. Hasonló fogásokkal csökkenthetjük a D ívfelező és A_0 oldalfelező pontok kijelöléséhez használt segédvonalak számát, majd g-t is felező merőlegesként kaphatjuk, ha A_0-tól a DK egyenesre egy csapásra a $2\varrho = GH$ szakaszt mérjük fel.

A fentiekben kerültük párhuzamos és merőleges egyenes „rajzolását” a derékszögű háromszögvonalzó szokásos elcsúsztatásával egy támasztó vonalzó mentén, illetve 90°-os átfordításával, mert ezek nem eukleidészi szerkesztő lépések.

Tudná-e valaki 21-nél kevesebb „húzással” előállítani az ABC háromszöget?