I. megoldás. x és $x+1$ minden pozitív egész x-re relatív prím, így x^3 és $(x+1)^3$ relatív prím köbszámok. Belátjuk, hogy a különbségük, $3x^2+3x+1$ végtelen sok x-re állít elő négyzetszámot, azaz a

$$3x^2+3x+1=y^2$$

egyenletnek végtelen sok megoldása van a pozitív egészek körében.

Mindkét oldalt 4-gyel szorozva, majd a bal oldalt a $z=2x+1$ helyettesítéssel átalakítva a $3z^2+1=4y^2$ egyenletet kapjuk. Így azt kell belátnunk, hogy a

$$4y^2-3z^2=1 \tag{1}$$

egyenletnek végtelen sok olyan pozitív egész megoldása van, amelyekre z páratlan.

$y=z=1$ megfelelő megoldás. Megmutatjuk, hogy ha y és z megfelelő, akkor $y'=7y+6z$ és $z'=8y+7z$ is az. Ha y és z pozitív egész, akkor y' és z' is az, továbbá $y'>y$ és $z'>z$, tehát egy adott megoldásból kiindulva végtelen sok különbözőt képezhetünk, amiből az állítás következik.

Látható, hogy ha z páratlan, akkor z' is az. Ezen kívül

$$4y'^2-3z'^2=4(49y^2+84yz+36z^2)-3(64y^2+112yz+49z^2)=4y^2-3z^2.$$

Tehát ha $4y^2-3z^2=1$, akkor $4y'^2-3z'^2=1$ is igaz. Ezzel állításunkat igazoltuk.

Megjegyzések. 1. Látható, hogy bármilyen pozitív növekvő p_n és q_n sorozatra, amelyre $4p_n^2-3q_n^2=1$, $\dfrac{p_n}{q_n}$ tart $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$-höz, hiszen ha $4a^2-3b^2=0$, akkor $\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, és p_n, q_n növekedésével $4p_n^2-3q_n^2$ értéke egyre inkább elhanyagolhatóvá válik. Ha $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$-t lánctörtekkel közelítjük:

$$\frac{1}{1};\quad \frac{1}{1+\frac{1}{6}};\quad \frac{1}{1+\frac{1}{6+\frac{1}{2}}};\quad \frac{1}{1+\frac{1}{6+\frac{1}{2+\frac{1}{6}}}}$$

stb., (a továbbiakban a 6 és a 2 ismétlődik) és $\dfrac{p_i}{q_i}$-vel az i-edik közelítő lánctört közönséges tört alakját jelöljük, tapasztalhatjuk, hogy $4p_i^2-3q_i^2$ minden páratlan i-re 1 (és minden páros i-re -3). A megoldásban kimondott rekurzív alakokhoz így is el lehet jutni.

2. Az (1) egyenlet $u=2y$ helyettesítéssel az $u^2-3z^2=1$ alakot ölti. Ez egy úgynevezett *Pell-féle* egyenlet. Feladatunk megoldása tehát egyenértékű annak igazolásával, hogy ennek a Pell egyenletnek végtelen sok olyan $(u;z)$ pozitív egészekből álló megoldása van, amelyben u páros, z pedig páratlan. A Pell-féle egyenletekről lapunk korábbi számaiban *Fried Ervin* írt egy 6 részből álló cikksorozatot. (Az első rész az 1976. évi 7. számban, a hatodik rész az 1978. évi 5. számban jelent meg.) Ebből a cikksorozatból az említett egyenlet általános megoldásán kívül – ami feladatunk megoldását is szolgáltatja – sok egyéb algebrai problémával is megismerkedhetnek érdeklődő olvasóink.

II. megoldás. Ha x és y relatív prímek, és egyikük páros, a másik páratlan, akkor könnyen látható, hogy $x+y$ és $x-y$ is relatív prímek. Be fogjuk látni, hogy végtelen sok ilyen x-re és y-ra lesz

$$(x+y)^3-(x-y)^3=6x^2y+2y^3=6y\left(x^2+\frac{y^2}{3}\right)$$

négyzetszám.

Keressük y-t a 6-tal osztható számok között, azaz legyen $y=6t$. Ekkor

$$6y\left(x^2+\frac{y^2}{3}\right)=36t(x^2+12t^2). \tag{2}$$

Ez nyilván négyzetszám, ha t és x^2+12t^2 is az; x és y pedig relatív prímek, ha x és t is azok, és x nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal. Megmutatjuk, hogy végtelen sok x-re és t-re teljesül mindkét feltétel együtt.

Ha $x=m^2-12n^2$ és $t=mn$ (ahol m és n tetszőleges pozitív egészek), akkor

$$x^2+12t^2=(m^2-12n^2)^2+12(2mn)^2=(m^2+12n^2)^2,$$

vagyis ekkor (2) jobb oldalának harmadik tényezője valóban négyzetszám.

Könnyen ellenőrizhető, hogy ha $m=(6p+1)^2$, ahol p tetszőleges pozitív egész, és $n=2$, akkor az összes többi feltétel is teljesül. Ekkor $t=4(6p+1)^2$, ami négyzetszám, $x=(6p+1)^4-48$, ami minden pozitív egész p-re pozitív egész, és 6-tal osztva 1-et ad maradékul, tehát sem 2-vel, sem pedig 3-mal nem osztható. Végül x és t relatív prímek, hiszen a 2 kivételével a t minden prímosztója osztója $6p+1$-nek, tehát nem lehet osztója x-nek, mivel $6p+1$ és 48 minden p-re relatív prímek.

Tehát az

$$x+y=(6p+1)^4+24(6p+1)^2-48$$

és az

$$x-y=(6p+1)^4-24(6p+1)^2-48$$

relatív prím számok köbének különbsége minden pozitív egész p-re négyzetszám, méghozzá különböző négyzetszám, hiszen p növelésével t és x^2+12t^2 is nő. Ezzel igazoltuk a feladat állítását.

Megjegyzés. Feladatunk kapcsolatban áll a *Gy.* 2359. gyakorlattal, amelynek megoldása lapunk 1987. évi 3. számában jelent meg. A megoldás után közölt 2. megjegyzésben bizonyítás nélkül megadtunk a (2) egyenletben szereplő y-ra egy rekurzív formulát, amellyel végtelen sok y érték előállítható. Az erre a megjegyzésre való hivatkozást természetesen nem fogadtuk el megoldásnak, hiszen most éppen a megjegyzésben közölt állítás bizonyítása volt a kitűzött feladat.