I. megoldás. Jelöljük a keresett összeget S_n-nel és alakítsuk az alábbiak szerint:

$$\begin{aligned} S_n &= (2-1)2^2(2+1) + (3-1)3^2(3+1) + \ldots + (n-1-1)(n-1)^2(n-1+1) = \\ &= 2^2(2^2-1) + 3^2(3^2-1) + \ldots + (n-1)^2\left((n-1)^2-1\right) = \\ &= 2^4 - 2^2 + 3^4 - 3^2 + \ldots + (n-1)^4 - (n-1)^2. \end{aligned}$$

Tehát S_n így írható :

$$S_n = 1^4 + 2^4 + \ldots + (n-1)^4 - \left(1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2\right).$$

A zárójelben levő összeg ismert, $\dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}$, ezért S_n zárt alakjához az

$$1^4 + 2^4 + \ldots + k^4$$

összeg zárt alakjára van szükség. Tekintsük ehhez az alábbi egyenlőségeket:

$$\begin{aligned} 2^5 = (1+1)^5 &= 1^5 + 5\cdot 1^4 + 10\cdot 1^3 + 10\cdot 1^2 + 5\cdot 1 + 1, \\ 3^5 = (2+1)^5 &= 2^5 + 5\cdot 2^4 + 10\cdot 2^3 + 10\cdot 2^2 + 5\cdot 2 + 1, \\ &\vdots \\ (k+1)^5 &= k^5 + 5\cdot k^4 + 10\cdot k^3 + 10\cdot k^2 + 5\cdot k + 1. \end{aligned}$$

Ezeket az egyenlőségeket összeadva rendezés után a

$$\begin{aligned} (k+1)^5 = 1^5 + 5(1^4 + 2^4 + \ldots + k^4) + 10(1^3 + 2^3 + \ldots + k^3) + 10(1^2 + 2^2 + \ldots + k^2) + \\ +5(1 + 2 + \ldots + k) + k \end{aligned}$$

egyenlőséget kapjuk, amiből, ha fölhasználjuk az első k pozitív egész összegére, négyzet- és köbösszegére vonatkozó ismert összefüggéseket, némi számolás után

$$1^4 + 2^4 + \ldots + k^4 = \frac{k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1)}{30}$$

adódik. Ennek alapján

$$S_n = \frac{(n-1)n(2n-1)(3n^2-3n-1)}{30} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6},$$

és így

$$S_n = \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(2n-1)}{10}.$$

II. megoldás. Keressük S_n-t az n ötödfokú polinomjaként, tehát

$$p(n) = an^5 + bn^4 + cn^3 + dn^2 + en + f$$

alakban. Feladatunk a p polinom együtthatóinak meghatározása. Tekintsük p-t az $n-1$ helyen :

$$p(n-1) = a(n-1)^5 + b(n-1)^4 + c(n-1)^3 + d(n-1)^2 + e(n-1) + f.$$

A műveleteket elvégezve és n fogyó hatványai szerint rendezve :

$$\begin{aligned} p(n-1) = a\cdot n^5 + (-5a+b)n^4 + (10a-4b+c)n^3 + (-10a+6b-3c+d)n^2 + \\ +(5a-4b+3c-2d+e)n + (-a+b-c+d-e+f). \end{aligned}$$

$p(n)$ és $p(n-1)$ felírt alakjából

(1)
$$\begin{aligned} p(n) - p(n-1) = 5an^4 + (-10a+4b)n^3 + (10a-6b+3c)n^2 + \\ +(-5a+4b-3c+2d)n + (a-b+c-d+e). \end{aligned}$$

Másrészt $S_n - S_{n-1}$ az eredeti összegből:

(2)
$$S_n - S_{n-1} = (n-2)(n-1)^2 n = n^4 - 4n^3 + 5n^2 - 2n.$$

(1) és (2) akkor és csak akkor egyenlő minden $n>3$ természetes számra, ha a két polinomban az n ugyanolyan kitevőjű hatványainak együtthatói megegyeznek, azaz

$$\begin{aligned} 5a &= 1,\\ -10a+4b &= -4,\\ 10a-6b+3c &= 5,\\ -5a+4b-3c+2d &= -2,\\ a-b+c-d+e &= 0. \end{aligned}$$

Ebből az egyenletrendszerből $a=\frac{1}{5}$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=0$, $d=-\frac{1}{2}$, $e=\frac{1}{5}$, és így a

$$p(n)=\frac{1}{5}n^5-\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{5}n$$

polinomra $p(n)-p(n-1)=S_n-S_{n-1}$ minden $n>3$ egészre. (Valójában $p(n)-p(n-1)=(n-2)(n-1)^2\cdot n$ fennáll minden egész, sőt minden valós n-re.)

Mivel ezen kívül $p(4)=108=S_4$, ezért valóban $p(n)=S_n$ az n minden szóba jövő értékére.

Megjegyzés. A második megoldásban szükség volt a kezdeti értékek ellenőrzésére, hiszen a p polinom puszta létezéséből – amit a talált egyenletrendszer megoldhatósága biztosít – csak annyi következik, hogy ha az S_n egyáltalán előállítható az n ötödfokú polinomjaként, akkor ez a polinom csak a $p(n)$ lehet.