Megmutatjuk, hogy a feladat kérdésére igenlő a válasz, ilyen ponthármas minden háromszöghöz létezik. Vegyünk föl egy tetszőleges háromszöget, és válasszuk meg a betűzést úgy, hogy az A, B, C csúcsokkal szemközti a, b, c oldalakra $a \le b \le c$ teljesüljön. Jelöljük a háromszög kerületének harmadát h-val. Ekkor nyilván $a \le h \le c$.

1988-02-065-1.eps

Ha X, Y és Z tetszőleges belső pontok a BC, CA, illetve AB oldalakon, akkor a b) feltétel pontosan akkor teljesül, ha

(1) $$XC + CY = YA + AZ = ZB + BX = h.$$

Ha a BX távolságot x-szel jelöljük, akkor X pontosan akkor belső pontja a BC oldalnak, ha

(2) $$0 < x < a,$$

másfelől (1) alapján a, c, h és x segítségével valamennyi további szóban forgó távolság kifejezhető:

$$\begin{aligned} &XC = a - x,\\ &CY = h - XC = h - a + x,\\ &ZB = h - BX = h - x,\\ &AZ = c - ZB = c - h + x, \text{ végül}\\ &AY = h - AZ = 2h - c - x. \end{aligned}$$

Vegyük most szemügyre az a) feltételt. Ez pontosan akkor teljesül, ha (2) mellett fennállnak még a

(3) $$0 < ZB = h - x < c \qquad \text{és a}$$
(4) $$0 < CY = h - a + x < b \quad \text{egyenlőtlenségek.}$$

Mivel $0 < x < a \le h \le c$, ezért (3) teljesül, és a (4)-beli CY is pozitív. A (2) mellett tehát a

(4') $$h - a + x < b$$

feltételnek kell még teljesülnie, ami x-re nézve együttesen a

(5) $$0 < x < \min(a, a + b - h)$$

egyenlőtlenséget jelenti.

Ami a c) feltételt illeti, ez *Ceva tételének* megfordítása szerint pontosan akkor teljesül, ha

$$AZ \cdot BX \cdot CY = ZB \cdot XC \cdot YA,$$

vagyis

(6) $$(c - h + x)x(h - a + x) = (h - x)(a - x)(2h - c - x).$$

Jelölje $p(x)$ és $q(x)$ a (6) bal, illetve jobb oldalán álló harmadfokú polinomot. Állításunk bizonyításához azt kell megmutatnunk, hogy létezik olyan x_0, melyre teljesül (5), másfelől $p(x_0) = q(x_0)$. Tekintsük a $p(x)$ és $q(x)$ polinomokat a 0, a és az $a + b - h$ helyeken. $p(0) = 0$, hisz a második tényező 0;

$q(0) = h \cdot a \cdot (2h - c) > 0$, hisz $2h - c = \dfrac{2a + 2b - c}{3}$, ami a háromszög-egyenlőtlenség szerint valóban pozitív.

$p(a) = (a + c - h)a \cdot h > 0$, hisz $c \ge h$ és $a > 0$, és

$q(a) = 0$, hisz a második tényező 0.

Végül

$$p(a + b - h) = (a + b + c - 2h)(a + b - h)b = h(a + b - h) \cdot b > 0,$$

hisz a háromszög-egyenlőtlenség szerint $a + b > c \ge h$ és $q(a + b - h) = 0$, hisz a harmadik tényező 0.

Összefoglalva azt kaptuk, hogy

$$p(0) < q(0), \quad p(a) > q(a) \quad \text{és} \quad p(a + b - h) > q(a + b - h).$$

Minthogy p is és q is *folytonos függvénye* x-nek, az első két egyenlőtlenségből következik, hogy van olyan pozitív, a-nál kisebb x_0', amelyre $p(x_0') = q(x_0')$, az első és a harmadik egyenlőtlenségből pedig, hogy van olyan pozitív, $(a + b - h)$-nál kisebb x_0'', amelyre $p(x_0'') = q(x_0'')$. Mindenképpen van tehát olyan pozitív, (5)-nek eleget tevő x_0, amelyre $p(x_0) = q(x_0)$. Ha most tekintjük a BC szakasz azon belső X pontját, amelyre $BX = x_0$, a CA szakasz azon

Y pontját, amelyre $CY = h - a + x_0$ és az AB szakasz azon Z pontját, amelyre $ZB = h - x_0$, akkor (5) szerint Y és Z is belső pontok, X, Y és Z választása miatt teljesül rájuk a b) feltétel, végül x_0 választása és a Ceva-tétel megfordítása szerint az AX, BY és CZ egyenesek valóban egy ponton mennek át.

Ezzel beláttuk, hogy minden ABC háromszöghöz található megfelelő X, Y, Z ponthármas.

Megjegyzések: 1. Könnyű belátni, hogy minden háromszöghöz pontosan egy megfelelő ponthármas létezik.

2. Sok olyan dolgozat érkezett, amelyben a megoldó felírta a (6) egyenletet, belátta, hogy annak van megoldása, de nem foglalkozott azzal a kérdéssel, hogy a kapott megoldáshoz tartozó X, Y, Z pontok valóban belső pontjai-e a háromszög megfelelő oldalainak. Az ilyen megoldások nem kaptak maximális pontszámot.