

Alkalmazzuk a befogótételt az O_1AO_2 és az O_1CO_2 derékszögű háromszögekre (1., 2. ábra):

$$O_1T_1 = \frac{2^2}{O_1O_2} = \frac{4}{r+2}; \quad O_2T_2 = \frac{r^2}{O_1O_2} = \frac{r^2}{r+2}.$$

1988-03-102-1.eps

1. ábra

1988-03-103-2.eps

2. ábra

A tükrözés miatt

$$O_1O'_1 = 2O_1T_1 = \frac{8}{r+2} \quad \text{és} \quad O_2O'_2 = 2O_2T_2 = \frac{2r^2}{r+2}.$$

Az $O'_1O'_2$ szakasz hosszának felírásakor figyelembe kell vennünk, hogy az O_1, O'_1, O'_2, O_2 pontok nem szükségképpen ebben a sorrendben helyezkednek el a két kör centrálisán, itt még az is lehetséges, hogy a tükröképpontok az O_1O_2 szakaszon kívülre esnek (2. ábra). Mindenképpen fennáll viszont az

$$(1) \quad \overrightarrow{O'_1O'_2} = \overrightarrow{O'_1O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2O'_2} = \overrightarrow{O'_1O_1} + \overrightarrow{O_2O'_2} - \overrightarrow{O_2O_1}$$

vektoregyenlőség. Abból, hogy az O'_1 az O_1O_2 félegyenesen, O'_2 pedig az O_2O_1 félegyenesen van, következik, hogy az (1) jobb oldalán álló vektorok, $\overrightarrow{O'_1O_1}$, $\overrightarrow{O_2O'_2}$ és $\overrightarrow{O_2O_1}$ egyállásúak (3. ábra).

1988-03-103-1.eps

3. ábra

Ekkor az $O'_1O'_2$ szakasz hossza az $\overrightarrow{O'_1O'_2}$ vektor abszolút értékeként az alábbi módon fejezhető ki a felbontásban részt vevő vektorok hosszával:

$$(2) \quad |\overrightarrow{O'_1O'_2}| = O'_1O'_2 = |O'_1O_1 + O_2O'_2 - O_2O_1|,$$

ahol a jobb oldalon az abszolút érték jelen belül a három szakasz hossza áll. Az ezekre kapott összefüggések, valamint a feltételül adott $O'_1O'_2 = 1$ felhasználásával (2) az alábbi alakba írható :

$$1 = \left| \frac{8 + 2r^2}{r+2} - (r+2) \right| = \left| \frac{(r-2)^2}{r+2} \right|, \quad \text{azaz} \quad 1 = \frac{(r-2)^2}{r+2}.$$

Innen az $r^2 - 5r + 2 = 0$ egyenletet kapjuk, melynek gyökei $\frac{5 + \sqrt{17}}{2}$ és $\frac{5 - \sqrt{17}}{2}$. Mivel lépéseink megfordíthatók, mindkét megoldás megfelel. A pontok sorrendje az első esetben O_1, O'_2, O'_1, O_2 , a másodikban pedig O_1, O'_2, O_2, O'_1 (2. ábra).