Egy négyzetszám maradéka 4-gyel osztva 0 vagy 1, így két négyzetszám összege nem adhat 4-gyel osztva maradékul 3-at. Négy, vagy annál több egymás utáni természetes szám között tehát van olyan, amelyik nem írható fel két négyzetszám összegeként, és így a k legnagyobb értéke legfeljebb 3 lehet.

Megmutatjuk, hogy ez a legnagyobb érték éppen a 3: megadunk végtelen sok olyan, szomszédos számokból álló számhármast, amelyek elemei fölírhatók két négyzetszám összegeként. Hívjuk a továbbiakban az ilyen tulajdonságú számokat *szépnek.*

Természetesnek tűnik az $\{m^2-1,\ m^2,\ m^2+1\}$ alakú hármasok vizsgálata, hiszen ezekben a második és a harmadik elem szép $(m^2+0^2,\ m^2+1^2)$, és így elég megmutatnunk, hogy m^2-1 végtelen sok m természetes számra szép.

Egy *Eulertől* származó azonosság szerint szép számok szorzata is szép. Valóban

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac)^2+(bd)^2+(ad)^2+(bc)^2=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2. \tag{1}$$

Ha most m^2-1 szép, akkor

$$(m^2)^2-1=(m^2-1)(m^2+1),$$

és így az (1) azonosság szerint $(m^2)^2-1$ szép számok szorzataként maga is az.

Elegendő tehát egyetlen olyan a^2 négyzetszámot találnunk, amelyre a^2-1 szép, mert a fentiek szerint ekkor $a_0=a$, $a_n=a_{n-1}^2$ választással az a_n^2-1 sorozat minden egyes eleme szép.

Mivel $8=3^2-1=2^2+2^2$, ezért $a=3$ megfelelő. Az így kapott $3^{2^n}-1$ $(n\geqq 1)$ sorozat minden eleme szép, és így a

$$\{3^{2^n}-1,\ 3^{2^n},\ 3^{2^n}+1\}$$

számhármasok elemei minden pozitív egész n-re előállnak két négyzetszám összegeként.

A k legnagyobb értéke tehát 3.

Megjegyzés: Könnyen látható, hogy a $4n^4+4n^2$ és a rákövetkező két természetes szám is megfelelő számhármast ad bármely pozitív egész n-re, hiszen

$$4n^4+4n^2=(2n^2)^2+(2n^2)^2,$$
$$4n^4+4n^2+1=(2n^2+1)^2+0^2,$$
$$4n^4+4n^2+2=(2n^2+1)^2+1^2.$$

Peremiczki István (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., II. o. t.)