Mindkét egyenlőség mindkét oldala akkor van értelmezve, ha az

$$a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0, \quad t > 0, \quad a \neq 1, \quad b \neq 1, \quad c \neq 1, \quad t \neq 1 \text{ és } \; b \neq c$$

feltételek mindegyike teljesül. Azt állítjuk, hogy ezek mellett a feltételek mellett a két egyenlőség ekvivalens. Ezt úgy mutatjuk meg, hogy az elsőből ekvivalens átalakításokkal eljutunk a másodikhoz.

Térjünk át az első egyenlőségben t alapú logaritmusokra, felhasználva, hogy ha $t > 0$, $t \neq 1$, $x > 0$ és $x \neq 1$, akkor $\log_x t = \dfrac{1}{\log_t x}$. A bal oldal ekkor $\dfrac{\log_t c}{\log_t a}$, a jobb oldal pedig

$$\frac{\dfrac{1}{\log_t a} - \dfrac{1}{\log_t b}}{\dfrac{1}{\log_t b} - \dfrac{1}{\log_t c}} = \frac{\log_t c}{\log_t a} \cdot \frac{\log_t b - \log_t a}{\log_t c - \log_t b}.$$

Feltételeink szerint $\dfrac{\log_t c}{\log_t a} \neq 0$, így a vele történő egyszerűsítés után kapott

$$1 = \frac{\log_t b - \log_t a}{\log_t c - \log_t b} \tag{1}$$

egyenlőség ekvivalens az eredetivel. Mivel $c \neq b$, ezért (1) jobb oldalán a nevező nem nulla, tehát (1) pontosan akkor teljesül, ha

$$\log_t c - \log_t b = \log_t b - \log_t a. \tag{2}$$

Tudjuk, hogy a, b, és c mindegyike pozitív, így (2) akkor és csak akkor igaz, ha

$$\log_t \frac{c}{b} = \log_t \frac{b}{a}. \tag{3}$$

A logaritmusfüggvény kölcsönösen egyértelmű, ezért $t > 0$, $t \neq 1$ esetén (3) a

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{a} \tag{4}$$

egyenlőséggel ekvivalens. Végül (4) nyilván pontosan akkor igaz, ha

$$ac = b^2,$$

azaz

$$\sqrt{ac} = b, \quad \text{hisz } \; a, \; b \; \text{ és } \; c \; \text{ pozitív számok.}$$

Beláttuk tehát, hogy amennyiben az első egyenlőség értelmes, akkor ekvivalens átalakításokkal valóban megkapható belőle a második, és ezzel a megoldást befejeztük.