Ha $n=1$, akkor minden x megoldás, hiszen $2x-1+1-x\equiv x$. Legyen tehát az $n\geq 2$. A továbbiakban két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy az n páros-e vagy páratlan.

1. eset. Az n páros. Ha $x>1$, akkor $2x-1>x>0$, így $(2x-1)^n>x^n$ és $(1-x)^n\geq 0$ (mert az n páros), tehát az egyenlet bal oldalán nagyobb szám áll, mint a jobb oldalán. Az $x=1$ megoldása az egyenletnek.

Ha $\frac{1}{2}<x<1$, akkor legyen $a=2x-1>0$ és $b=1-x>0$. A vizsgált egyenlet ekkor $a^n+b^n=(a+b)^n$ alakú. A jobb oldalt a binomiális tétel alapján kifejtve könnyen belátható, hogy

(1) $$(a+b)^n>a^n+b^n,\quad \text{ha}\quad n\geq 2,\ a>0\quad \text{és}\quad b>0.$$

Így tehát ebben az esetben sincs megoldás.

$x=\frac{1}{2}$-re $2x-1=0$, $1-x=x$, tehát $x=\frac{1}{2}$ megoldás.

Végül ha $x<\frac{1}{2}$, akkor $|1-x|>|x|$, hiszen $1-x>x$ és $1-x>-x$. Ekkor $(1-x)^n=|1-x|^n>|x|^n=x^n$ és $(2x-1)^n>0$ (mert n páros), tehát a bal oldal ismét nagyobb a jobb oldalnál.

Ha az n páros, akkor az egyenletnek két megoldása van: $x=\frac{1}{2}$ és $x=1$.

2. eset. Az n páratlan. Látható, hogy ha az egyenletben szereplő három elsőfokú polinom ($2x-1$, $1-x$ és x) valamelyike nulla, akkor egyenlőséget kapunk, így $x=\frac{1}{2}$, $x=1$ és $x=0$ megoldások.

Ha egyikük sem nulla, akkor a páratlan n-re fennálló

$$z^n=(-z)^n$$

azonosság felhasználásával az egyenlet mindig $a^n+b^n=(a+b)^n$ alakba rendezhető, ahol a és b *pozitív*.A tagok előjelét és az egyenlet ennek megfelelő átrendezéseit az alábbi táblázat tartalmazza:

	$2x-1$	$1-x$	x	Bal oldal	Jobb oldal
$1<x$	$+$	$-$	$+$	$(2x-1)^n$	$(x-1)^n+x^n$
$\frac{1}{2}<x<1$	$+$	$+$	$+$	$(2x-1)^n+(1-x)^n$	x^n
$0<x<\frac{1}{2}$	$-$	$+$	$+$	$(1-x)^n$	$x^n+(1-2x)^n$
$x<0$	$-$	$+$	$-$	$(-x)^n+(1-x)^n$	$(1-2x)^n$

Az (1)-ben megfogalmazott állítás szerint az egyenletnek a kéttagú összeget tartalmazó oldala kisebb, mint a másik, így nincsen a fent talált három gyöktől különböző megoldás.

Egyenletünknek tehát $n=1$-re minden valós szám megoldása, ha pedig $n\geq 2$, akkor $x=\frac{1}{2}$ és $x=1$, továbbá páratlan n-re még $x=0$ is.

Csirik János (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., II. o. t.)
dolgozata alapján

Megjegyzés. Páratlan n-re az $x=0$ megoldás. Ha $x\neq 0$, akkor x^n-nel való osztás után $\frac{1-x}{x}=t$ helyettesítéssel az

(2) $$(1-t)^n+t^n=1$$

egyenlethez jutunk. Ha $f(t)$-vel jelöljük a bal oldalon álló függvényt, akkor

$$f^n(t)=n(n-1)\big[(1-t)^{n-2}+t^{n-2}\big].$$

Könnyen belátható, hogy ha $n>1$, akkor $f^n(t)>0$. Ez nyilvánvaló, ha az n páros, ha pedig az n páratlan, akkor az átrendezés után kapott

$$t^{n-2}>(t-1)^{n-2}$$

egyenlőtlenség a páratlan kitevőjű hatványfüggvény szigorú monotonitásából következik.

1988-02-063-1.eps

Az f függvény tehát szigorúan konvex, és így tetszőleges értéket – az 1-et is – legfeljebb kétszer vehet fel (ábra). Mivel $f(0)=f(1)=1$, ezért ha $n>1$, akkor a (2) egyenletnek pontosan két gyöke van, a $t=0$ és a $t=1$, ahonnan az eredeti egyenlet nullától különböző gyökei 1 és $\frac{1}{2}$.