I. megoldás. Adott $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ számokra legyen

$$S_n(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=(1+x_1)(1+x_2)\ \ldots\ (1+x_n)+(1-x_1)(1-x_2)\ \ldots\ (1-x_n). \tag{1}$$

Nyilván $S_1(x_1)=2$, így ha $n=1$, akkor mindkét bizonyítandó egyenlőtlenségben egyenlőség áll. A továbbiakban legyen az n legalább 2.

Ha (1) jobb oldalán elvégezzük a beszorzást, akkor a páratlan tényezős szorzatok kiesnek és

$$S_n(x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,x_n)=2+2P_n(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \tag{2}$$

adódik, ahol $P_n(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ az adott számokból készíthető páros tényezős szorzatok összege. A feltétel szerint ezekben a szorzatokban minden egyes tényező pozitív és kisebb 1-nél, ezért

$$0<P_n(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)<P_n\underbrace{(1,\ 1,\ \ldots,\ 1)}_{n\ \text{darab 1-es}}.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$2<S_n(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)<2+P_n(1,\ 1,\ \ldots,\ 1). \tag{3}$$

A (3) jobb oldalán (2) szerint éppen

$$S_n(1,\ 1,\ \ldots,\ 1)=(1+1)(1+1)\ldots(1+1)+(1-1)(1-1)\ldots(1-1)=2^n$$

áll, és így

$$2<S_n(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)<2^n,$$

ha $n>1$. Ezzel a bizonyítást befejeztük. Látható, hogy (3) szerint az $n>1$ esetben egyik egyenlőtlenségben sem állhat egyenlőség.

II. megoldás. Jelöljük $\overline{x}$-sal az $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ számok $\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ átlagát. Mivel az x_i számok mindegyike 0 és 1 közé esik, így ugyanez $\overline{x}$-ra is igaz.

A feltétel szerint az $(1+x_i)$ és az $(1-x_i)$ számok mindegyike pozitív, így a vizsgált összegben szereplő n-tényezős szorzatok felülről becsülhetők a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenség felhasználásával. Eszerint

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)\le\left(\frac{1+x_1+1+x_2+\ldots+1+x_n}{n}\right)^n=(1+\overline{x})^n,$$

illetve

$$(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)\le\left(\frac{1-x_1+1-x_2+\ldots+1-x_n}{n}\right)^n=(1-\overline{x})^n.$$

A két egyenlőtlenséget összeadva;

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)+(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)\le(1+\overline{x})^n+(1-\overline{x})^n.$$

Itt $n=1$-re a bal oldal éppen 2, $n\ge 2$-re viszont

$$(1+\overline{x})^n+(1-\overline{x})^n<(1+\overline{x}+1-\overline{x})^n=2^n. \tag{4}$$

A binomiális tétel szerint ugyanis

$$\big((1+\overline{x})+(1-\overline{x})\big)^n=(1+\overline{x})^n+$$
$$+\binom{n}{1}(1+\overline{x})^{n-1}(1-\overline{x})+\ldots+\binom{n}{k}(1+\overline{x})^{n-k}(1-\overline{x})^k+\ldots+(1-\overline{x})^n.$$

Az összegnek legalább három tagja van, minden tag pozitív ($1+\overline{x}>1$, $1-\overline{x}>0$ a feltétel szerint), így az összeg határozottan nagyobb az első és utolsó tag összegénél. Ezzel a feladat egyenlőtlenségének jobb oldalát beláttuk, valamint azt is, hogy $n\ge 2$-re nem állhat fenn egyenlőség. $n=1$-re viszont a vizsgált kifejezés értéke minden x_1 értékre $1+x_1+1-x_1=2$, tehát itt *minden* szóba jövő x_1-re egyenlőség áll.

Az egyenlőtlenség bal oldalán $n=1$-re szintén mindig egyenlőség áll. Jelöljük most $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$-re p_j-vel az $(1+x_1)(1+x_2)\ \ldots\ (1+x_j)$, q_j-vel pedig az $(1-x_1)(1-x_2)\ \ldots\ (1-x_j)$ szorzatot. Ekkor $p_j>q_j$, hiszen $0<x_i<1$ miatt $1+x_i>1-x_i>0$, s nagyobb pozitív számok szorzata is nagyobb. Másrészt

$$p_j+q_j=p_{j-1}(1+x_j)+q_{j-1}(1-x_j)=p_{j-1}+q_{j-1}+x_j(p_{j-1}-q_{j-1})>p_{j-1}+q_{j-1},$$

hiszen $x_j > 0$ és $p_{j-1} - q_{j-1} > 0$. Azt kapjuk tehát, hogy

$$2 = p_1 + q_1 < p_2 + q_2 < \ldots < p_{n-1} + q_{n-1} < p_n + q_n,$$

tehát az egyenlőtlenség bal oldala is igaz, és $n \geq 2$-re nem lehet egyenlőség.

Összefoglalva: Az egyenlőtlenségekben sohasem állhat fenn egyenlőség, ha $n \geq 2$, és minden szóba jövő x_1 értékre egyenlőség van, ha $n = 1$.

Megjegyzések: 1. A feladat szövege kizárta az $x_i = 0$ vagy $x_i = 1$ lehetőséget. Természetesen nem tekintettük hibának, ha valaki a „nulla és egy közé esik" kifejezést úgy értelmezte, hogy e két eset is benne foglaltatik. Ez ugyanis csak konvenció kérdése, és aki a $0 \leq x_i \leq 1$ feltételből indult ki, az többletmunkát vállalt magára. (Megjegyezzük: ha egy feladat szövegezését nem érezzük egyértelműnek, mindig érdemes az általánosabb értelmezést választani, hiszen így a kitűző által elgondolt változatot is biztosan tárgyaljuk majd, ami az ellenkező esetben nem biztos.) Mindkét közölt bizonyítás könnyen kiterjeszthető a $0 \leq x_i \leq 1$ esetre is, ilyenkor azonban akkor is lehetséges egyenlőség, ha $n \geq 2$.

Az első megoldásban vizsgált páros tényezős szorzatok összege most lehet nulla, amennyiben minden egyes ilyen szorzat tartalmaz 0 tényezőt. Ez pedig pontosan akkor igaz, ha az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számok közül legfeljebb egy pozitív. Ilyenkor tehát

$$S_n(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = 2.$$

Ami a felső becslést illeti, itt nyilván pontosan akkor van egyenlőség, ha minden egyes páros tényezős szorzat értéke 1, azaz $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$.

2. A jobb oldali egyenlőtlenség is könnyen bizonyítható a $p_j + q_j = p_{j-1}(1+x_j) + q_{j-1}(1-x_j) = p_{j-1} + q_{j-1} + x_j(p_{j-1} - q_{j-1})$ azonosság alapján. Mivel $x_j \leq 1$ és $0 \leq p_{j-1} - q_{j-1} \leq p_{j-1} + q_{j-1}$, ezért $x_j(p_{j-1} - q_{j-1}) \leq p_{j-1} + q_{j-1}$ és $p_j + q_j = p_{j-1} + q_{j-1} + x_j(p_{j-1} - q_{j-1}) \leq 2(p_{j-1} + q_{j-1})$.

Innen azt kapjuk, hogy $p_n + q_n \leq 2(p_{n-1} + q_{n-1}) \leq 4(p_{n-2} + q_{n-2}) \leq \ldots \leq 2^k(p_{n-k} + q_{n-k}) \leq \ldots \leq 2^{n-1}(p_1 + q_1) = 2^n$. Egyenlőség csak akkor áll, ha minden $j \geq 2$-re $x_j(p_{j-1} - q_{j-1}) = p_{j-1} - q_{j-1}$, azaz $x_j = 1$ és $q_{j-1} = 0$. Ez pedig pontosan akkor teljesül, ha minden x_j értéke 1.

Ha viszont $n = 1$, akkor (a $j \geq 2$ feltétel miatt) nem kapunk kikötést, és minden x_i értékre egyenlőség van.