Speciális esetek vizsgálata alapján azt sejthetjük, hogy a keresett R az E pontnak az e egyenesre vonatkozó tükörképe.

1987-12-447-1.eps

1. ábra

Legyen először a P pont k belsejében, de különbözzék O -tól. Használjuk az 1. ábra jelöléseit. Az EOQ egyenlő szárú háromszögben $OQP\sphericalangle = OEP\sphericalangle$, az e egyenesre vonatkozó szimmetria miatt pedig $ORP\sphericalangle = OEP\sphericalangle$. Az OP szakasz tehát ugyanakkora szögben látszik a Q -ból és az R -ből. Mivel a Q és az R az OP egyenesnek ugyanazon a partján van, az $O,\ P,\ Q$ és R pontok valóban egy körön vannak.

Nézzük ezután azt az esetet, amikor a P pont a k körön kívül van. Az előbbiekhez hasonlóan a 2/a ábra α -val jelölt szögei most is egyenlők, ezért $OQP\sphericalangle = 180^\circ - \alpha$. Az $OPQR$ négyszög tehát most is húrnégyszög.

1987-12-447-2.eps

2.a ábra

1987-12-447-3.eps

2.b ábra

Ha E a P és a Q között van (2/b ábra), akkor ha $OQE\sphericalangle = \alpha$, akkor $ORP\sphericalangle = 180^\circ - \alpha$, és így $OPQR$ most is húrnégyszög.

Hátravan még a következő három speciális eset vizsgálata:

a) P egybeesik O-val. Ekkor a $P,\ Q,\ R$ pontok egy körön vannak, vagy azért, mert Q is egybeesik R-rel (3/a ábra), vagy pedig azért, mert $P,\ Q$, és R nem esnek egy egyenesre (3/b ábra).

1987-12-447-4.eps

3.a ábra

1987-12-447-5.eps

3.b ábra

b) P a k kör kerületén van. Ha magát a P pontot tekintjük a PE szelő és a kör második metszéspontjának, akkor $P \equiv Q$ miatt $O,\ P,\ Q$ és R most is egy körön vannak.

c) A PE egyenes a kör érintője. Ekkor E azonos Q-val, $OEP\sphericalangle$ derékszög, és Thalész tétele szerint $O,\ P,\ Q$ és R most is egy körön vannak (4. ábra).

1987-12-448-1.eps

4. ábra

Ezzel megmutattuk, hogy $O,\ P,\ Q$ és az E-nek az e egyenesre vonatkozó tükörképe a P minden lehetséges helyzetében egy körön vannak.