I. megoldás. Vizsgáljuk először, hogy adott ABC háromszögre mi azon P pontok T_B halmaza a síkban, amelyekre a szóban forgó háromszögek közül kettő, például a PAB és a PBC háromszögek területe egyenlő. Ha $P \equiv B$, akkor a háromszögek szakasszá fajulnak, területük nulla, így $B \in T_B$. Egyébként e két háromszög PB oldala közös, így $P \not\equiv B$ akkor és csak akkor eleme T_B-nek, ha az A és a C csúcsok egyenlő távol vannak a PB egyenestől.

1988-03-100-1.eps

1. ábra

Ha a PB egyenes elválasztja A-t és C-t, akkor a fentiek szerint át kell haladjon az AC felezőpontján, ha pedig nem, akkor nyilván párhuzamos AC-vel. Ennek a metsző egyenespárnak pedig nyilván minden pontja hozzátartozik a T_B halmazhoz (1. ábra).

Ha most mindhárom háromszög egyenlő területű, akkor P bármely két ilyen egyenespárnak pontja. Tetszőleges ABC háromszöghöz négy ilyen pont van (2. ábra), a háromszög súlypontja, illetve a csúcsok tükörképe a szemközti oldal felezőpontjára.

1988-03-100-2.eps

2. ábra

Vizsgáljuk most meg, hogy erre a négy pontra milyen háromszögekben teljesül a feladat második, a kerületekről szóló föltétele. Tekintsük először az ABC háromszög S súlypontját. Ha például az SAB és az SBC háromszögek kerülete egyenlő, akkor

$$SA + BA = SC + BC. \tag{1}$$

Azt állítjuk, hogy (1) pontosan akkor teljesül, ha az ABC háromszög egyenlő szárú, mégpedig úgy, hogy a B csúcsból induló oldalak egyenlők.

Ha $BA = BC$, akkor (1) nyilván igaz, hiszen a B-ből induló súlyvonal egyúttal az AC felező merőlegese is. Ha pedig például $BA > BC$, akkor a B-ből induló súlyvonal teljes egészében – a másik végpontja kivételével – az AC felező merőlegesének a C-t tartalmazó oldalán halad. Ekkor pedig $SA > SC$, hisz S, a súlypont, belső pontja a súlyvonalnak (3. ábra). A két egyenlőtlenséget összeadva $SA + BA > SC + BC$, vagyis (1) nem állhat fenn.

1988-03-100-3.eps

3. ábra

Egy ABC háromszög S súlypontjára tehát akkor és csak akkor lesz egyenlő az SAB, SBC és az SCA háromszögek *kerülete*, ha az ABC bármely két oldala egyenlő, azaz a háromszög szabályos.

Tekintsük most a P további három lehetséges helyzete közül például a P_A pontot, az A-nak a BC felezőpontjára vonatkozó tükörképét. Az ACP_AB négyszög paralelogramma, így az AP_AB és az AP_AC háromszögek kerülete egyenlő. A harmadik, P_ABC háromszög pedig éppen akkor lesz ezekkel egyenlő kerületű, ha az előbbi paralelogramma átlói egyenlők, maga a paralelogramma pedig így téglalap. Ez pedig pontosan akkor teljesül, ha az ABC háromszögben az A csúcsnál derékszög van.

Azt kaptuk, hogy a megadott tulajdonságú P pont akkor és csak akkor létezik, ha az ABC háromszög szabályos, vagy pedig derékszögű. Előbbi esetben P a háromszög súlypontja, az utóbbiban pedig a derékszögű csúcs tükörképe az átfogó felezőpontjára.

Megjegyzés. A PAB és a PBC háromszögek *kerülete* pontosan akkor egyenlő, ha $PA + AB = PC + CB$, azaz $PA - PC = CB - AB$. Az ilyen tulajdonságú P pontok $AB = BC$ esetén az AC felező merőlegesén, egyébként pedig egy hiperbola egyik ágán helyezkednek el (4. ábra). A hiperbola fókuszai A és C, a hiperbolaág pedig áthalad a B-nek az AC felező merőlegesére vonatkozó tükörképén.

1988-03-101-1.eps

4. ábra

II. megoldás. Jelöljük a PA, PB, PC szakaszok hosszát rendre x, y, z-vel, és legyen a PAB, PBC és PCA háromszögek kerülete $2s$. Ekkor

$$2s = x + y + c = x + z + b = y + z + a.$$

Mindegyik egyenlet mindkét oldalából $x + y + z$-t kivonva kapjuk, hogy

$$c - z = b - y = a - x. \tag{2}$$

Mivel a területek is megegyeznek, a Heron képlet szerint :

$$\sqrt{s(s-x)(s-y)(s-c)} = \sqrt{s(s-x)(s-z)(s-b)} = \sqrt{s(s-y)(s-z)(s-a)}.$$

Négyzetre emelve és $s(s-x)(s-y)(s-z)$-vel osztva, ami nem 0,

$$\frac{s-c}{s-z} = \frac{s-b}{s-y} = \frac{s-a}{s-x} \text{ adódik.} \tag{3}$$

Vegyük figyelembe, hogy pl.

$$\frac{s-c}{s-z} = \frac{s-z+z-c}{s-z} = 1 + \frac{z-c}{s-z},$$

és így (3) a következőképpen írható:

$$1 - \frac{c-z}{s-z} = 1 - \frac{b-y}{s-y} = 1 - \frac{a-x}{s-x}. \tag{4}$$

(2) szerint e törtek számlálói egyenlők, így (4) csak úgy teljesülhet, ha a nevezők is azok, vagy ha a számlálók értéke nulla. Ha tehát az ABC háromszögre és a P pontra teljesül a feladat feltétele, akkor a bevezetett jelölésekkel vagy

$$\begin{array}{ll} a) & s-z = s-y = s-x, \text{ vagy pedig} \\ b) & c-z = b-y = a-x = 0. \end{array}$$

Az a) esetben $x = y = z$, de akkor (2) szerint $a = b = c$, tehát a háromszög szabályos.

A b) esetben $a = x$, $b = y$ és $c = z$, azaz $AB = PC$, $BC = PA$ és $CA = PB$. Bárhogy is választunk ki tehát a négy pont, A, B, C és P közül kettőt-kettőt, a párokat összekötő szakaszok egyenlők. E négy pont tehát – valamilyen sorrendben – egy olyan paralelogramma négy csúcsa, amelynek egyenlő hosszúak az átlói, a négyszög ezért téglalap, az ABC háromszög pedig derékszögű.

Könnyen látható, hogy a talált esetekben létezik a feladat feltételeinek eleget tevő P pont. Az a) esetben P-nek a csúcsoktól mért távolságai egyenlők, így P az oldalfelező merőlegesek metszéspontja (azaz egyben a háromszög súlypontja is). A b) esetben pedig P az ABC derékszögű háromszög téglalappá történő kiegészítése után adódó negyedik csúcs.