Először belátjuk, hogy az $1/2$ nem helyettesíthető más számmal. Legyen ugyanis csak két pont adva, mégpedig a szakasz végpontjai, $A$ és $B$. Ekkor az $AB$ szakasz minden $X$ pontjának $1/2$ az átlagtávolsága e két ponttól, más szám tehát valóban nem jöhet szóba. Ez a példa természetesen nemcsak két pontra jó, mivel a pontok nem szükségképpen különbözők (vehetem $n$-szer az $A$ és $n$-szer a $B$ pontot).

Az állítás első felének a bizonyításához helyezzük el az $AB$ szakaszt a számegyenesen úgy, hogy az $A$ a 0, a $B$ pedig az 1 pontba essék. Ekkor az $AB$ szakasz tetszőleges $x$ pontja pontosan $x$ távolságra van az $A$-tól (azaz 0-tól). Legyen az adott véges sok pont: $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, és legyen $x$ az $AB$ szakasz egy tetszőleges pontja. Ekkor $x$ távolsága az $x_i$ ponttól $|x-x_i|$, tehát az adott $n$ ponttól vett átlagtávolságot $d(x)$-szel jelölve

$$d(x)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|x-x_i|}{n}.$$

Ismeretes, hogy $|x-x_i|$ folytonos függvény, $d(x)$ tehát $n$ db folytonos függvény összegének $n$-edrészeként maga is folytonos. Most vegyük észre, hogy minden $x_i$ pontnak a 0 és az 1 ponttól vett távolságösszege $|x_i|+|1-x_i|=1$ $(0\leqq x_i\leqq 1)$, így $d(0)+d(1)=\dfrac{n}{n}=1$. Ha most $d(0)=\dfrac{1}{2}$, akkor a 0 pont, tehát $A$ (és ugyanígy az 1 pont, tehát $B$) megfelel a feladat követelményének. Ha $d(0)<\dfrac{1}{2}$, akkor $d(1)>\dfrac{1}{2}$, és így $d$ folytonossága miatt van olyan $x$ pont a 0 és az 1 között, amelyre $d(x)=\dfrac{1}{2}$. Ugyanez áll, ha $d(0)>\dfrac{1}{2}$ $\left(\text{és } d(1)<\dfrac{1}{2}\right)$. A feladat állítását ezzel beláttuk.