Kiszámoljuk A_k pontos értékét. (Az egyszerűség kedvéért az üres sorozatot is a „jó” sorozatok közé tartozónak tekintjük. Ez nyilván nem változtat a feladat állításán, hiszen $\frac{A_k}{k!}$ és $\frac{A_k+1}{k!}$ egyszerre konvergens, mert $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k!}=0$.)

Nézzük meg, hány i elemű, „jó” (a feladat feltételeit kielégítő) sorozat van ($i=1,\ 2,\ \ldots,\ k$). k darab elem közül i darabot $\binom{k}{i}$ -féleképpen választhatunk ki, s ezt az i elemet $i!$-féleképpen állíthatjuk sorba ($i=0$ esetén $0!=1$). Ezek szerint $\binom{k}{i}i!=\frac{k!}{(k-i)!}$ darab i elemű „jó” sorozat van. Így $A_k=\sum\limits_{i=0}^{k}\frac{k!}{(k-i)!}=k!\sum\limits_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}$ (ha i végigfut a 0 és k közti egészeken, akkor $k-i$ is ezt teszi). Tehát

$$\frac{A_k}{k!}=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{k!}.$$

$\frac{A_k}{k!}$ láthatóan szigorúan monoton növekvő sorozat, másrészt $i!=i(i-1)\ldots2\cdot1\geqq2\cdot2\cdot\ldots\cdot2\cdot1=2^{i-1}$ minden $i\geqq1$-re, tehát

$$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}\leqq1+\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}=$$
$$=1+\frac{1-\frac{1}{2^k}}{1-\frac{1}{2}}<1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3,$$

így $\frac{A_k}{k!}$ felülről korlátos. Minthogy monoton nő és felülről korlátos, ezért konvergens, amit bizonyítani kellett.

Megjegyzések. 1. Ismeretes, hogy $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{k}\frac{x^i}{i!}=e^x$ minden x-re fennáll (ld.: *Urbán János:* Határértékszámítás, Műszaki Könyvkiadó, 1975., 422. oldal), így $x=1$-re azt kapjuk, hogy

$$\lim_{k\to\infty}\frac{A_k}{k!}=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}=e.$$

2. Az $s_0=a_0$, $s_1=a_0+a_1$, $\ldots$, $s_k=a_0+a_1+\cdots+a_k$ alakú sorozat (ún. végtelen sor) konvergenciájának elégséges (de nem szükséges!) feltétele, ha teljesül, hogy

a) minden a_i pozitív (a sor pozitív tagú) és

b) van olyan $0<q<1$ szám, hogy minden i-re

$$a_{i+1}/a_i\leqq q.$$

Az a) feltétel ugyanis biztosítja, hogy s_k (szigorúan) monoton nő. A b) feltétel alapján pedig az s_k sor felülről becsülhető egy konvergens (tehát korlátos) mértani sorral: ugyanis

$$a_i=a_i/a_{i-1}\cdot a_{i-1}/a_{i-2}\cdot\ldots\cdot a_1/a_0\cdot a_0\leqq q^ia_0,$$

tehát $s_k=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_k\leqq a_0+a_0q+a_0q^2+\ldots+a_0q^k=a_0\frac{1-q^{k+1}}{1-q}<\frac{a_0}{1-q}$ ($q<1$, $a_0>0$). Így s_k felülről korlátos, és mivel monoton nő, valóban konvergens. Az s_k sor még akkor is felülről becsülhető egy q hányadosú mértani sor és egy konstans összegével, ha b) helyett a következő, gyengébb feltétel teljesül:

b') van olyan $q<1$ pozitív szám, amelyre minden elég nagy i esetén $a_{i+1}/a_i\leqq q$.

a) és b') együtt az ún. *hányados-kritérium,* amit mi a fenti megoldásban $q=\frac{1}{2}$ helyettesítéssel alkalmaztunk. A mi esetünkben $\frac{a_i+1}{a_i}=\frac{1}{i+1}$, s ez 0-hoz tart, ha i a végtelenbe tart, így b') nyilván akármilyen $0<q$ esetén fennáll.

(Megjegyzendő, hogy ha x rögzített pozitív szám, akkor az előző megjegyzésben szereplő $s_k=\frac{1}{0!}+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}$ sorozatról ugyanígy látható be, hogy konvergens.)