Előre kell bocsátanunk, hogy a feladat kitűzésekor az egyenlőtlenség iránya hibásan, fordítva jelent meg.

*

(A feladat helyesen:

Bizonyítsuk be, hogy ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós számok, akkor

$$\frac{1}{\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\ldots+\frac{1}{1+a_n}}-\frac{1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \geqq \frac{1}{n}.)$$

*

A megoldáshoz egy ismert Csebisev-féle egyenlőtlenséget használunk fel.

Ha $b_1, b_2, \ldots, b_n$ valamint $c_1, c_2, \ldots, c_n$ a valós számoknak két, egyformán rendezett sorozata (azaz mindkettő növekvő, vagy mindkettő csökkenő), akkor az egyes sorozatok számtani középértékeinek szorzata legfeljebb akkora, mint a megfelelő elemek szorzatainak számtani középértéke, vagyis

$$\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}\cdot\frac{c_1+c_2+\ldots+c_n}{n} \leqq \frac{b_1c_1+b_2c_2+\ldots+b_nc_n}{n}.$$

(Bizonyítása megtalálható pl. a Matematikai versenytételek II. Rész 45. oldalán, Középiskolai Szakköri Füzetek.)

A feladatban szereplő $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós számok sorrendjének nincs kitüntetett szerepe, ezért az általánosság megszorítása nélkül előírhatjuk, hogy $a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n > 0$ teljesüljön.

Legyen $b_i=\dfrac{1}{a_i}$ és $c_i=\dfrac{1}{1+a_i}$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Ekkor nyilván $b_1 \leqq b_2 \leqq \ldots \leqq b_n$ és $c_1 \leqq c_2 \leqq \ldots \leqq c_n$, ezért a *Csebisev*-féle egyenlőtlenség fennáll ezekre a mennyiségekre. A bizonyítás most már azon múlik, hogy esetünkben $b_ic_i=b_i-c_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Ennek alapján

$$\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}\cdot\frac{c_1+c_2+\ldots+c_n}{n} \leqq \frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}-\frac{c_1+c_2+\ldots+c_n}{n}.$$

A kapott egyenlőtlenség mindkét oldalát a pozitív

$$\frac{(b_1+b_2+\ldots+b_n)(c_1+c_2+\ldots+c_n)}{n} - \text{nel}$$

elosztva éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

A *Csebisev*-féle egyenlőtlenség levezetésének ismeretében azt is megállapíthatjuk, hogy egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn a két oldal között, ha $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Megjegyzés. Egy hibás állítást elintézhetünk egyetlen ellenpéldával, a megoldók zöme azonban nem érte be ennyivel, hanem rájött a hiba mibenlétére, és a helyes állítást be is bizonyította. Ők dolgozatukra a maximális pontszámot kapták. A csupán ellenpéldát beküldők munkáját 2 pontra értékeltük. Második megoldással az 5 pont mellé további két pontot lehetett szerezni.