I. megoldás. Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$s_k = x^k + y^k + z^k \quad (k \geqq 0)$$

és

$$a = xy + xz + yz, \quad b = xyz.$$

„Stratégiánk” a következő: Ismerjük $x + y + z$ értékét. Megmutatjuk, hogy ennek, valamint a-nak és b-nek a segítségével s_k tetszőleges k természetes számra kifejezhető. Minthogy s_3 és s_7 értékét ismerjük, így a-ra és b-re két egyenletet kapunk. Kiderül, hogy ez a kétismeretlenes egyenletrendszer már nagyon egyszerűen megoldható.

Írjuk fel először azt a harmadfokú egyenletet, amelynek gyökei éppen x, y és z:

$$(u - x)(u - y)(u - z) = 0.$$

Ezt kifejtve és rendezve az

(4) $$u^3 = 2u^2 - au + b$$

egyenlethez jutunk. Ha tehát x, y, z a feladat egyenletrendszerének egy megoldás-hármasa, akkor bármelyikük gyöke lesz (4)-nek, sőt az abból u hatványaival való szorzással nyerhető

$$u^k = 2u^{k-1} - au^{k-2} + bu^{k-3} \quad (k \geqq 3)$$

egyenleteknek is.

Ez azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} x^k &= 2x^{k-1} - ax^{k-2} + bx^{k-3}, \\ y^k &= 2y^{k-1} - ay^{k-2} + by^{k-3}, \\ z^k &= 2z^{k-1} - az^{k-2} + bz^{k-3}, \quad k \geqq 3. \end{aligned}$$

E három egyenletet összeadva az

(5) $$s_k = 2s_{k-1} - as_{k-2} + bs_{k-3}, \quad k \geqq 3$$

összefüggést kapjuk. Így szép sorban ki tudjuk számítani s_3, s_4, s_5, s_6, s_7 értékét a és b segítségével, hiszen $s_0 = 3$, $s_1 = 2$ adott, innen

$$s_2 = x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) = 4 - 2a.$$

Nézzük, mit ad (5) s_3-ra !

$$s_3 = 2s_2 - as_1 + bs_0 = 2(4 - 2a) - 2a + 3b.$$

(2) szerint $s_3 = 20$, amit beírva az egyszerűsítés után a $b = 4 + 2a$ összefüggéshez jutunk.

Kezdeti programunk tehát lényegesen egyszerűsödik: s_k most kifejezhető csupán az a segítségével is:

(5’) $$s_k = 2s_{k-1} - as_{k-2} + (4 + 2a)s_{k-3}, \quad k \geqq 3.$$

Ezt rendre $k = 4,\ 5,\ 6,\ 7$-re alkalmazva :

$$\begin{aligned} s_4 &= 2s_3 - as_2 + (4 + 2a)s_1 = 40 - a(4 - 2a) + 2(4 + 2a) = 48 + 2a^2. \\ s_5 &= 2s_4 - as_3 + (4 + 2a)s_2 = 2(48 + 2a^2) - 20a + (4 + 2a)(4 - 2a) = 112 - 20a. \\ s_6 &= 2s_5 - as_4 + (4 + 2a)s_3 = 2(112 - 20a) - a(48 + 2a^2) + (4 + 2a) \cdot 20 = \\ &= 304 - 48a - 2a^3. \\ s_7 &= 2s_6 - as_5 + (4 + 2a)s_4 = 2(304 - 48a - 2a^3) - a(112 - 20a) + \\ &+ (4 + 2a)(48 + 2a^2) = 800 - 112a + 28a^2. \end{aligned}$$

Minthogy $s_7 = 2060$ értéke ismert, a-ra másodfokú egyenletet kapunk. Az egyszerűsítés után $a^2 - 4a - 45 = 0$, ahonnan $a_1 = -5$ vagy $a_2 = 9$. Utóbbi nem ad. valós $x,\ y,\ z$ megoldást, mert $0 \leqq s_2 = x^2 + y^2 + z^2 = 4 - 2a = -14$ lehetetlen. Így a -ra, tehát b -re is csak egy-egy valós megoldást kapunk: $a = -5$, $b = -6$. Az a harmadfokú egyenlet tehát, amelynek megoldásai éppen a feladat egyenletrendszerének $x,\ y,\ z$ megoldáshármasa :

$$u^3 - 2u^2 + 6 = 0,$$

s ennek megoldásai 1, -2 és 3. Egyenletrendszerünk lehetséges megoldásait tehát e három szám hat permutációjaként kapjuk :

$$\begin{array}{llllll} x_1 = 3; & x_2 = 3; & x_3 = 1; & x_4 = 1; & x_5 = -2; & x_6 = -2 \\ y_1 = 1; & y_2 = -2; & y_3 = 3; & y_4 = -2; & y_5 = 3; & y_6 = 1 \\ z_1 = -2; & z_2 = 1; & z_3 = -2; & z_4 = 3; & z_5 = 1; & z_6 = 3. \end{array}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy e számhármasokra $s_1 = 2,\ s_3 = 20,\ s_7 = 2060$, a feladat egyenletrendszerének tehát valóban megoldásai.

Megjegyzés. Érdekes megfigyelni, hogy bár s_7 hetedfokú polinom, mégis fel tudtuk írni az a másodfokú polinomjaként, holott a csak másodfokú (kettős szorzatokból áll). Azért tudtuk most a fokszámot csökkenteni, mert ismertük s_1 és s_3 értékét. Ugyanez a helyzet s_5 -nél, ahol a jobb oldal a -ban csak elsőfokú. Viszont sem s_4 -nél, sem s_6 -nál nem csökkent a fokszám. Könnyen ellenőrizhető, hogy ha (s_7 , értékének ismerete nélkül) tovább folytatnánk az s_k kifejezését a -val, páros k esetén a-nak mindig $\frac{k}{2}$-edfokú polinomját kapnánk, ahol $a^{k/2}$ együtthatója felváltva $+2$ és -2, páratlan k esetén viszont (éppen ezért) a fokszám csökken: $\frac{k-3}{2}$ -edfokú lesz a-ban. Így pl. elvileg megoldható egy olyan egyenletrendszer, ahol s_7 helyett s_{11} értéke van megadva, de nem mindig oldható meg, ha s_{10}, hiszen a negyedfokú egyenlet megoldására van, az ötödfokúéra pedig nincs általános eljárás. (Mindez érvényes attól függetlenül is, hogy s_1 és s_3 konkrét értékét hogy adjuk meg.)

II. megoldás. Legyen most is $a = xy + yz + zx$ és $b = xyz$. Ezúttal is a és b értékét, tehát annak a harmadfokú

$$u^3 - 2u^2 + au - b$$

polinomnak az együtthatóit határozzuk meg, amelynek a kitűzött egyenletrendszer $x,\ y,\ z$ megoldása a gyökhalmaza. Ehhez az alábbi azonosságokat használjuk fel.

(6)
$$(x+y+z)^3 - (x^3+y^3+z^3) = 3(x+y)(y+z)(z+x) = \\ = (x+y+z)(xy+yz+zx) - xyz.$$

(7)
$$(x+y+z)^7 + (x^7+y^7+z^7) = \\ = 7(x+y)(y+z)(z+x)[(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)^2 + xyz(x+y+z)].$$

(6) és (7) bal oldala (1), (2), (3) alapján -12, illetve -1932. Így (6)-ból

$$(x+y)(y+z)(z+x) = -4,$$

ahonnan (7) szerint

$$(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)^2 + 2xyz = 69$$

adódik.

A talált összefüggések bal oldala felírható a, b és $x+y+z=2$ segítségével, és így a

$$2a - b = -4$$

$$(4-a)^2 + 2b = 69$$

egyenletrendszert kapjuk. Ennek két megoldása van, $a_1 = 9$, $b_1 = 22$, illetve $a_2 = -5$, $b_2 = -6$.

Az első megoldás nyomán kapott harmadfokú polinom, $u^3 - 2u^2 + 9u - 22$ szigorúan monoton növő, így csak egy valós gyöke van, ilyenkor tehát nem kapunk valós megoldást.

A második esetben az $u^3 - 2u^2 - 5u + 6 = 0$ egyenletet kapjuk. Ennek gyökei 1, -2 és 3, és így az egyenletrendszer hat megoldása

$$\begin{array}{llllll} x_1 = 3; & x_2 = 3; & x_3 = 1; & x_4 = 1; & x_5 = -2; & x_6 = -2 \\ y_1 = 1; & y_2 = -2; & y_3 = -2; & y_4 = 3; & y_5 = 3; & y_6 = 1 \\ z_1 = -2; & z_2 = 1; & z_3 = 3; & z_4 = -2 & z_5 = 1; & z_6 = 3. \end{array}$$