I. megoldás. Jelöljük a szabályos háromszög oldalát a-val, az XAB szöget pedig α-val (1. ábra).

1987-11-376-1.eps

1. ábra

Ekkor $YAD\sphericalangle=30^\circ-\alpha$ és $YXC\sphericalangle=30^\circ+\alpha$. Az ábra derékszögű háromszögeiből:

$$AB=a\cdot\cos\alpha,\quad AD=a\cdot\cos(30^\circ-\alpha)$$
$$\text{és}\quad XC=a\cdot\cos(30^\circ+\alpha).$$

A téglalapból megmaradó három derékszögű háromszög területe így

$$\begin{aligned}t_{ABX}&=\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha,\\ t_{ADY}&=\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\cos(30^\circ-\alpha)\cdot\sin(30^\circ-\alpha),\\ t_{XCY}&=\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\cos(30^\circ+\alpha)\cdot\sin(30^\circ+\alpha).\end{aligned}$$

Bebizonyítjuk, hogy az első két terület összege ugyanannyi, mint a harmadik.

$$\begin{aligned}t_{ABX}+t_{ADY}&=\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha+\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\cos(30^\circ-\alpha)\cdot\sin(30^\circ-\alpha)=\\ &=\frac{1}{4}\cdot a^2[\sin 2\alpha+\sin(60^\circ-2\alpha)]=\frac{1}{4}\cdot a^2\cdot 2\cdot\sin 30^\circ\cdot\cos(30^\circ-2\alpha),\end{aligned}$$

ahol az utolsó lépésben fölhasználtuk a $\sin\ x+\sin\ y=2\cdot\sin\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2}$ azonosságot. Figyelembe véve, hogy $\cos(30^\circ-2\alpha)=\sin(60^\circ+2\alpha)$, a területek összegére kapott előbbi kifejezésünk így alakul:

$$t_{ABX}+t_{ADY}=\frac{1}{4}\cdot a^2\cdot\sin(60^\circ+2\alpha)=\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\sin(30^\circ+\alpha)\cdot\cos(30^\circ+\alpha),$$

ami valóban az XCY háromszög területe. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

II. megoldás. Ismét azt mutatjuk meg, hogy az XCY háromszög területe egyenlő az ABX és ADY háromszögek területének összegével. E derékszögű háromszögek átfogója egyenlő, ezért elegendő belátni, hogy az utóbbi két háromszögben az átfogóhoz tartozó magasságok összege az XCY háromszög átfogóhoz tartozó magasságával egyenlő.

Forgassuk el az ADY háromszöget az Y, az ABX háromszöget pedig az X csúcsa körül 60°-kal úgy, hogy az előbbi háromszög AY, az utóbbinak pedig az AX oldala menjen át az XY oldalba. Az egyes elforgatások után a D és a B képe legyen D' illetve B' (1. ábra).

Az elforgatott háromszögek derékszögű csúcsa, a D' és a B' rajta van az XY szakasz Thalész-körén, csakúgy mint a C csúcs, ezért a $CD'B'$ háromszög körülírt körének középpontja az XY szakasz O felezőpontja. Megmutatjuk, hogy O ennek a háromszögnek súlypontja is, vagyis a háromszög szabályos.

A 60°-os elforgatás miatt $D'YC\sphericalangle=120^\circ$, a $CYD'B'$ húrnégyszögben tehát $CB'D'\sphericalangle=60^\circ$ valóban, és hasonlóan kapjuk, hogy $CD'B'\sphericalangle=60^\circ$.

1987-11-377-1.eps

2. ábra

Tekintsük ezután a $CD'B'$ háromszöget a súlypontján áthaladó XY egyenessel, és használjuk a 2. ábra jelöléseit. Ezen az ábrán m_1 az XYD' háromszög átfogóhoz tartozó magassága, m_2 és m pedig ugyanilyen magasság az XYB', illetve az XYC háromszögben. A bevezetőben mondottak szerint azt kell megmutatnunk, hogy

$$m=m_1+m_2. \tag{1}$$

Az ábráról leolvasható, hogy a $B'T_2T_1D'$ trapéz középvonala,

$$FG=\frac{m_1+m}{2}. \tag{2}$$

Az $FGO\sim CTO$ hasonlóságból:

$$m:FG=OC:FO,$$

s mivel a jobb oldal 2 – hiszen O súlypont –

$$m = 2FG. \tag{3}$$

(2) és (3)-ból következik (1), amit bizonyítani akartunk.

Megjegyzés. Fölmerülhet a kérdés, vajon mely téglalapokból vágható ki a feladat követelményei szerinti szabályos háromszög. Világos, hogy α-ra $0 \leqq \alpha \leqq 30°$, azaz $0 \leqq \operatorname{tg} \alpha \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}$. A téglalap oldalainak aránya

$$\frac{AD}{AB} = \frac{a \cdot \cos(30° - \alpha)}{a \cdot \cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

vagyis a

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq \frac{AD}{AB} \leqq \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

egyenlőtlenségnek kell teljesülnie.