Az (1) bal oldalán lévő tagokban térjünk át tetszőleges, 1-nél nagyobb alapú logaritmusra és jelöljük ezt a „log" szimbólummal.

Ekkor a következő, az (1)-gyel ekvivalens egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\frac{\log a}{\log(b+c)}+\frac{\log b}{\log(c+a)}+\frac{\log c}{\log(a+b)}\geqq\frac{3}{2}. \tag{2}$$

Ennek igazolásához fölhasználhatjuk a következő egyszerű tényt: ha $x\geqq 2$ és $y\geqq 2$, akkor $xy\geqq x+y$. Ez valóban igaz, hiszen

$$xy-x-y+1\geqq 1$$

azonnal látszik az

$$(x-1)(y-1)\geqq 1$$

alakból.

Ezt fölhasználva a (2) bal oldalát csökkentjük, ha a nevezőkben az összegek helyett a tagok szorzatát írjuk. Elegendő tehát azt megmutatni, hogy

$$\frac{\log\ a}{\log\ bc}+\frac{\log\ b}{\log\ ca}+\frac{\log\ c}{\log\ ab}\geqq\frac{3}{2},$$

vagy

$$\frac{\log\ a}{\log\ b+\log\ c}+\frac{\log\ b}{\log\ c+\log\ a}+\frac{\log\ c}{\log\ a+\log\ b}\geqq\frac{3}{2}.$$

Vezessük be a $\log\ a=A$, $\log\ b=B$, $\log\ c=C$ jelöléseket. Ekkor a bizonyítandó állítás a következő alakot ölti:

$$\frac{A}{B+C}+\frac{B}{C+A}+\frac{C}{A+B}\geqq\frac{3}{2}, \tag{3}$$

ahol A, B és C tetszőleges pozitív számok.

Legyen ezután

$$\begin{aligned}B+C&=x\\C+A&=y\\A+B&=z.\end{aligned}$$

Ezt a három egyenletet összeadva: $2A+2B+2C=x+y+z$, ahonnan az első egyenletet fölhasználva: $2A+2x=x+y+z$, és így

$$A=\frac{1}{2}(-x+y+z)$$

adódik.

Hasonlóan kapjuk, hogy $B=\frac{1}{2}(x-y+z)$ és $C=\frac{1}{2}(x+y-z)$.

Ezután (3) így alakul:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{-x+y+z}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x-y+z}{y}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x+y-z}{z}\geqq\frac{3}{2}.$$

Mindkét oldalt 2-vel szorozva és alkalmasan csoportosítva:

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\geqq 6$$

adódik, ami már nyilvánvaló, hiszen x, y, z pozitív számok, és így pl.

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqq 2,$$

ami jól ismert helyes egyenlőtlenség.

A jelölésekre visszatekintve azt is látjuk, hogy egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a=b=c=2$.

Dienes János (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., III. o .t.)