Ha $n=1$, akkor a táblázat csak egyféleképpen tölthető ki, ha pedig $n=2$, akkor nyilván bármely kitöltés megfelelő. Ez $4!=24$ lehetőséget jelent, ha a forgatással és tükrözéssel egymásba vihető kitöltéseket megkülönböztetjük egymástól, egyébként pedig $24/8=3$ -at. A továbbiakban az $n \geqq 3$ esettel foglalkozunk.

1987-12-440-1.eps

1.a ábra

1987-12-440-2.eps

1.b ábra

Az *1/a ábrán* az $n=5$ esetre bemutatott kitöltés nyilván megfelelő. Az *1/b ábrán* a különbségek láthatók a négyféle lehetséges szomszédságra. A bal alsó és a jobb fölső sarokmezőnek nincs főátló irányú szomszédja, így az itteni számok kicserélhetők a mellettük állókkal. Azt állítjuk, hogy nincsen az így kapható összesen négy megfelelő kitöltéstől lényegesen különböző, azaz tükrözéssel és forgatással minden megoldás a fenti négy valamelyikébe vihető.

Tekintsünk egy megfelelő kitöltést, és legyen $D=n+1$. Ha $d(x,\ y)$ jelöli az $\boxed{x}$ és az $\boxed{y}$ mezők között a szomszédos mezőkön át vezető legrövidebb út hosszát (tehát ahogyan egy király mozog a sakktáblán), akkor nyilván $1 \leqq d(x,\ y) \leqq n-1$, másrészt a kitöltésből adódik, hogy

$$d(x,\ y) \geqq \frac{|x-y|}{D}. \tag{1}$$

Ha két mezőre (1)-ben egyenlőség van, akkor a legrövidebb úton $\boxed{x}$ ből $\boxed{y}$-ig haladva ($x<y$ föltehető) minden lépésben legalább D-t kell haladnunk. Mivel a feltétel szerint ennél többet egyszer sem haladhatunk, így az útbaejtett mezők egyértelműen meghatározottak: x, $x+D$, $x+2D$, $\ldots$, $x+d(x,\ y)\cdot D=y$. Ilyenkor tehát pontosan egy $d(x,\ y)$ hosszúságú út vezet $\boxed{\mathrm{x}}$ és $\boxed{\mathrm{y}}$ között, és így a két mező vagy szomszédos (ha $d(x,\ y)=1$), vagy pedig egy $d(x,\ y)+1$ hosszúságú *átló* két szélső mezeje, ahol átlónak a 2. ábrán látható mezők sorozatát nevezzük. Hivjuk a kitöltésnek ezt a tulajdonságát „merev átló" tulajdonságnak.

1987-12-441-1.eps

2. ábra

E tulajdonság szerint $\boxed{1}$ és $\boxed{n^2}$ egy n hosszúságú átló két szélső mezeje. Ilyen átló kettő van, és föltehető, hogy az $\boxed{1}$ a bal fölső, az $\boxed{n^2}$ pedig a jobb alsó sarokmező. A táblázat leghosszabb főátlója tehát az *1 ábra* szerint van kitöltve, az i-edik sor i-edik mezőjében $1+(i-1)D=a_i$ áll.

Ekkor

$$d(n^2-1,\ 1) \geqq \frac{n^2-2}{n+1} > n-2, \quad \text{azaz} \quad d(n^2-1,\ 1)=n-1,$$

így $\boxed{n^2-1}$ az utolsó sorban, vagy pedig az utolsó oszlopban van. Föltehető, hogy az első eset valósul meg, azaz $\boxed{n^2-1}$ az utolsó sorban van.

Most az i-re vonatkozó teljes indukcióval belátjuk, hogy

A) ha $(i-1)n+1 \leqq x \leqq i \cdot n$, akkor $\boxed{x}$ az i -edik sorban van és aszerint áll az átlóselem, a_i előtt vagy pedig utána, hogy kisebb, vagy nagyobb a_i -nél, úgy, ahogyan ez az *1 ábra* kitöltésében látható.

$i=1$ -re ez azt jelenti, hogy ha $x \leqq n$, akkor $\boxed{x}$ az első sorban van. Mivel

$$d(n^2-1,\ x) \geqq \frac{n^2-1-x}{n+1} \geqq \frac{n^2-n-1}{n+1} > n-2,$$

ezért $d(n^2-1,\ x)=n-1$, és ugyanígy kapjuk, hogy $d(n^2,\ x)=n-1$. A legalsó sor két különböző mezőjéről tehát nem vezet $(n-1)$-nél rövidebb út az $\boxed{x}$ -hez, így az valóban az első sorban van.

Legyen most $1<i \leqq n$ és tegyük fel, hogy az i -nél kisebb sorszámú sorokra az állítás igaz. Így persze az i -edik sorban minden elem legalább $(i-1)n+1$. Mivel az $(i-1)$ -edik sor maximális eleme $(i-1)n$ és az i -edik sor bármely elemének legalább két fölső szomszédja van, az i -edik sorban valóban nem állhat $(i-1)n-1+D=i\cdot n$-nél nagyobb szám. Ugyanígy kapjuk, hogy az i -edik sorban az i-nél kisebb sorszámú helyeken minden szám legfeljebb $a_{i-1}-1+D<a_i$. Ezzel az *A)* állítást igazoltuk.

Hívjuk most i -edik átlónak az első sor i -edik mezőjén kezdődő főátlót. Az i -re vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk, hogy

B) ha $1 \leqq i \leqq n-2$, akkor az i -edik átlóban az i, $i+D$, $i+2D$, $\ldots$, $i+(n-i)D$ számok állnak az *1 ábra* kitöltésének megfelelően.

Ha $i=1$, akkor éppen a leghosszabb főátlóról van szó, így az állítás igaz. Legyen most $1<i\leqq n-2$.

Az indukciós föltevés miatt így egyrészt az első sorban $\boxed{i}$ csak a *3/a ábra* satírozott részén lehet, másrészt az $(n-i+1)$ -edik sorban az átlóselem, a_{n-i+1} után már csak a legutolsó mező maradt kitöltetlen (*3/b ábra*). A sor maximális eleme, $M_i=(n-i+1)n$ tehát csak ide kerülhet.

1987-12-442-1.eps

3.a ábra

1987-12-442-2.eps

3.b ábra

Így a jobb fölső sarokban lévő $(n-i+1)$ oldalú négyzet két szemközti sorában lévén $d(i,\ M_i)=n-i$, ezért (1)-ben most egyenlőség van, hisz $\dfrac{M_i-i}{D}=n-i$. Mivel pedig $n-i>1$, ezért a merev átló tulajdonság szerint az állítás i-re is teljesül. Ezzel a *B)* állítást is bebizonyítottuk.

Végül ha $i=n-1$, akkor annyi most is igaz, hogy a második sorban a maximális elem, $M_2=2n$ az utolsó mezőben áll. Ekkor viszont $d(n-1,\ 2n)=1$, így csak annyit állíthatunk, hogy az $\boxed{n-1}$ és a $\boxed{2n}$ mezők szomszédosak, így az első sor-ban $\boxed{n-1}$ az utolsó előtti, vagy pedig az utolsó mező.

A legalsó sor mezőin kezdődő főátlók felhasználásával hasonlóan bizonyítható, hogy a leghosszabb főátló alatti átlók kitöltése is csak az *1 ábra* szerint alakulhat (itt is lehetséges persze az utolsó sor első két elemének a cseréje). Ezzel bizonyításunk teljes, a feladatnak valóban csak az adott típusú megoldása létezik.

Tükrözéssel és forgatással mind a négy megoldásból 8–8 készíthető, így ha ezeket is megkülönböztetjük, akkor az $n>2$ esetben 32-féle megfelelő kitöltése létezik a táblázatnak.