I. megoldás. Jelöljük a gráf négy harmadfokú pontját az ábrán látható módon A, B, C és D-vel. Legyen E_1 az A és C-vel, E_2 pedig a B és D-vel összekötött másodfokú pont.

1987-11-373-1.eps

Az olyan leképezést, amely egy gráf csúcsait csúcsokba, éleit élekbe képezi le, a gráf *izomorfiájának* nevezzük. Az ilyen izomorfiának nyilván megvannak a következő tulajdonságai:

1. Különböző csúcsokat különböző csúcsokba visz, különben a kép-gráfnak kevesebb csúcsa volna, mint az eredetinek.
2. Különböző éleket különböző élekbe visz, ez következik az előző tulajdon ságból.
3. „Nem-élt” is „nem-élbe” visz (ha két pont nincs összekötve, akkor képeik sem lehetnek összekötve, különben a kép-gráfnak több éle volna, mint az eredetinek.)
4. Fokszámtartó (a pontnak és képének foka megegyezik).
5. Ha egy e él egy d és egy d'-fokú pontot köt össze, akkor e képe is egy d és egy d'-fokú pontot köt össze.
6. Ha egy pontnak k szomszédja van, s ezek rendre $d_1,\ d_2,\ \dots,\ d_k$-fokúak, akkor a pont képének is k szomszédja van, s ezek is rendre $d_1,\ d_2,\ \dots,\ d_k$-fokúak.

Mármost 4. miatt A képe a mi gráfunkban csak A, B, C vagy D lehet.

5. miatt az AD él képe csak AD vagy BC lehet, mert csak ez a két él köt össze harmadfokú pontokat.

6. miatt E_1 képe csak E_1 vagy E_2 lehet, mert csak e két olyan másodfokú pont van, amelynek mindkét szomszédja harmadfokú.

E három észrevétel alapján megmutatjuk, hogy gráfunk izomorfiáit egyértelműen meghatározza az, hogy mi az A képe.

I. eset. A képe önmaga. Ekkor az AD él képe is A-ból induló él, tehát az AD él képe is önmaga, így *D képe is önmaga.* E_1 képe szomszédja A képének, azaz A-nak, így E_1 képe nem lehet E_2. Tehát *E_1 képe is önmaga.* 1. miatt E_2 képe már nem lehet E_1, így *E_2 képe is önmaga.* C képe szomszédja E_1 képének, azaz E_1-nek, tehát C képe A vagy C. De A már „foglalt”, így 1. miatt *C képe is önmaga.* A CD él is helyén marad (2. miatt nem mehet át a már foglalt AD élbe), így *D képe is önmaga.* Végül nyilván helyén marad az A és B között futó háromélű út és a C és D között futó háromélű út is. Ez az izomorfia tehát azonosság (minden pont helyben marad).

II. eset. A képe D. Ekkor az AD él helyben marad ugyan (BC-be nem mehet), de megfordul: D képe A lesz. E_1 képe szomszédja A képének, D-nek, így E_1 képe E_2. 1. miatt E_2 képe nem lehet E_2, tehát *E_2 képe csak E_1 lehet.* C képe szomszédja E_1 képének, tehát E_2-nek, így C képe vagy D vagy B. De D már foglalt, így 1. miatt *C képe B.* A BC él is megfordul tehát: *B képe C.* Végül helyet cserél az A és B, illetve a D és C között futó háromélű út is. Az izomorfiát tehát most is egyértelműen meghatározza A képe. (A kapott leképezés valóban izomorfia.)

III. eset. A képe B. Ekkor az AD él képe csak a BC él lehet, így *D képe C.* E_1 képe szomszédja A képének, azaz B-nek, így csak E_2 lehet. E_2 képe tehát csak E_1 lehet (E_2 már foglalt). C képe szomszédja E_1 képének, E_2-nek, tehát C képe vagy B, vagy D. De B már foglalt, így 1. miatt *C képe D.* *B képe* már csak *A lehet.* Az A és B között futó háromélű út most „megfordul”, a két belső pontja helyet cserél, és ugyanez történik a C és D között futó háromélű úttal is. A kapott leképezés tehát izomorfia, és A képe egyértelműen meghatározza.

IV. eset. A képe C. Ekkor az AD él képe a BC él, így *D képe B.* E_1 képe szomszédja A képének, C-nek, így nem lehet E_2, csak E_1. E_2 képe 1. miatt nem lehet E_1, csak E_2, így E_1 és E_2 önmagukba mennek át. De ekkor C képe szomszédja E_1-nek, tehát csak C vagy A lehet, ám C már foglalt, így *C képe A.* Hasonlóan *B képe D.* A C és D közt futó háromélű út most átmegy az A és B közt futó háromélű útba, és viszont. Így ismét egyértelműen meghatározott izomorfiát kaptunk.

A gráfnak tehát négy izomorfiája van.

II. megoldás. Tekintsük a harmadfokú $A,\ B,\ C$ és D pontokat. Ezek között hat, harmadik harmadfokú pontot nem érintő út halad: két él, két kételű út és két háromélű út. Nyilvánvaló, hogy a két él, a két kételű út, illetve a két háromélű út csak egymással cserélhető ki. A gráf tehát ugyanúgy viselkedik, mint egy négycsúcsú teljes gráf, amelynek AB és CD éle fehér, AC és BD éle fekete, AD és BC éle pedig kék.

A leképezés során most nyilván azt írjuk elő, hogy minden él színe egyezzék meg a kép-él színével, azaz AB képe csak AB vagy CD, AC képe csak AC vagy BD, AD képe pedig csak AD vagy BC lehet. Ha tehát rögzítjük A képét, akkor ez meghatározza, hogy mi lesz az A-ból induló három különböző színű él képe, s így B, C és D képe is egyértelműen meghatározott. Így négy leképezést kapunk, és könnyen ellenőrizhető, hogy mind a négy leképezés valóban izomorfia (lásd a táblázatot).

A	AB	AC	AD	B	C	D
A	AB	AC	AD	B	C	D
B	BA	BD	BC	A	D	C
C	CD	CA	CB	D	A	B
D	DC	DB	DA	C	B	A