Először azt bizonyítjuk, hogy ha MA és MB harmadolják az O_1MO_2 szöget, akkor fönnáll az érintőszakaszoknak a feladatban mondott mértani közép tulajdonsága (az állítás „csak akkor" része). A föltevés miatt egyenlő szögeket az ábrán α-val jelöltük.

1987-11-371-1.eps

Az MO_1B és az MO_2A háromszögek egyenlő szárúak, és így $O_1BM\sphericalangle = 2\alpha = O_2AM\sphericalangle$. Az ABM háromszögben tehát $AM = BM$, hiszen az AB oldalon fekvő két szög egyenlő. Az O_1AM háromszög M csúcsánál lévő szöge α, A-nál fekvő külső szöge 2α, ezért $MO_1A\sphericalangle = \alpha$. Így ez a háromszög is egyenlő szárú, és $O_1A = AM$. Ugyanígy látható be, hogy $O_2B = BM$, és amint láttuk $AM = BM$, tehát $O_1A = O_2B$. Ebből viszont azonnal adódik, hogy a körök sugara egyenlő. Jelöljük r_1 és r_2 közös értékét r-rel, az O_1O_2 szakasz hosszát pedig d-vel.

Az O_1O_2M és MO_2B háromszögek hasonlók, hisz szögeik páronként egyenlők. Ezért

$$\frac{d}{r} = \frac{r}{d-r}, \quad \text{azaz} \quad d^2 - r^2 = dr.$$

Ha e_1-gyel jelöljük az O_1-ből a k_2 körhöz húzott érintőszakasz hosszát, akkor ismeretes, hogy $e_1^2 = d^2 - r^2$, tehát előbbi eredményünk szerint $e_1^2 = dr$, és ezt kellett bizonyítanunk. A körök egybevágósága miatt ekkor ugyanez természetesen az O_2-ből a k_1-hez húzott e_2 érintőre is igaz.

Ezután az állítás „akkor" részét bizonyítjuk, vagyis azt, hogy ha fennáll az érintőszakaszok mértani közép tulajdonsága, akkor MA és MB harmadolja az O_1MO_2 szöget.

A feltételek szerint $e_1^2 = dr_1$ és $e_2^2 = dr_2$. Az érintők négyzetét a centrális (d) és a sugarak segítségével kifejezve:

$$d^2 - r_2^2 = dr_1 \quad \text{és} \quad d^2 - r_1^2 = dr_2. \tag{1}$$

E két egyenlet különbségéből:

$$r_2^2 - r_1^2 = d(r_2 - r_1), \quad \text{azaz} \quad (r_2 - r_1)(r_2 + r_1 - d) = 0.$$

Mivel a két kör metszi egymást, $r_2 + r_1 > d$, ezért $r_2 = r_1$. A közös értéket jelöljük most is r-rel.

(1) bármelyik egyenlete szerint $d^2 - r^2 = dr$, amiből $d^2 - dr = r^2$ és így $\frac{d}{r} = \frac{r}{d-r}$. Ez azt jelenti, hogy az O_1O_2M és az O_2MB háromszögekben két–két megfelelő oldal aránya megegyezik.

Tekintve, hogy közbezárt szögük – a $BO_2M\sphericalangle$ – is ugyanaz, a két háromszög hasonló. De akkor $BO_2 = BM$, hiszen $r_1 = r_2$ miatt az O_1O_2M háromszög egyenlő szárú. Ugyanígy megmutatható, hogy $O_1A = AM$, és $BO_2 = r - AB = AO_1$ miatt $AM = BM$ is teljesül. Ha most α-val jelöljük a BO_2M szöget, rögtön láthatjuk, hogy $AO_1M\sphericalangle = AMO_1\sphericalangle = BMO_2\sphericalangle = \alpha$ is igaz, továbbá az ABM egyenlő szárú háromszögben az AB alapon fekvő szögek nagysága 2α. De ekkor $AMO_2\sphericalangle = 2\alpha$, vagyis $AMB\sphericalangle = \alpha$.

Ezzel megmutattuk, hogy ha (1) fennáll, akkor MA és MB valóban harmadolják az O_1MO_2 szöget.

Megjegyzések. 1. A megoldásból kiderül, hogy a feladat feltételei csak egyenlő sugarú körökben teljesülnek.

2. A bizonyítás során α-val jelölt szöget nem kellett kiszámítanunk, de látjuk, hogy $5\alpha = 180°$, tehát $\alpha = 36°$. Az AMO_2 háromszög olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek az alappal szemközti szöge $36°$. Ezt a háromszöget az MB szögfelezője két egyenlő szárú háromszögre bontja, amelyek egyike hasonló az eredetihez. Könnyen megmutatható, hogy ez fordítva is igaz, vagyis érvényes a következő: Ha egy egyenlő szárú háromszöget az alapon fekvő egyik szög szögfelezője két egyenlő szárú háromszögre vág szét, akkor az alappal szemközti szög $36°$. A bizonyítást az olvasóra hagyjuk.

3. A fenti egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögeinek nagysága $72°$. Ekkora szöget zár be egy szabályos ötszög körülírt körének két szomszédos csúcsba mutató sugara. Az ilyen egyenlő szárú háromszög szerkesztése tehát egyenértékű a szabályos ötszög megszerkesztésével.