Nyilvánvaló, hogy $a_n = \sqrt{n + \sqrt{n + \ldots + \sqrt{n}}} \geqq \sqrt{n}$, hiszen $\sqrt{x}$ szigorúan monoton nő, ha $x > 0$. Ebből $\sqrt{n} > 0$ miatt következik, hogy

$$\frac{a_n}{\sqrt{n}} \geqq 1. \tag{1}$$

Most belátjuk, hogy $a_n < \sqrt{n} + 1$, ha $n \geqq 1$. Ennél még kicsit többet állítunk. Ha $a_k(n)$ jelöli azt a $\sqrt{n + \ldots + \sqrt{n}}$ kifejezést, amelyben a gyökjelek száma k, akkor k-tól függetlenül $a_k(n) < \sqrt{n} + 1$. Ezt a k-ra vonatkozó indukcióval bizonyítjuk. $k = 1$-re az állítás triviális: $a_1(n) = \sqrt{n} + 1$. Ha $(k-1)$-re $a_{k-1}(n) < \sqrt{n} + 1$, akkor

$$a_k(n) = \sqrt{n + a_{k-1}(n)} < \sqrt{n + \sqrt{n} + 1}.$$

De $\sqrt{n + \sqrt{n} + 1} < \sqrt{n} + 1$, amiről négyzetre emeléssel meggyőződhetünk ($n + \sqrt{n} + 1 < n + 2\sqrt{n} + 1$, és mindkét oldal pozitív). Így $a_k(n) < \sqrt{n} + 1$, amivel az indukciós lépést igazoltuk. Beláttuk tehát, hogy $a_n = a_n(n) < \sqrt{n} + 1$, s innen

$$\frac{a_n}{\sqrt{n}} < 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ezt (1)-gyel összevetve $1 \leqq \dfrac{a_n}{\sqrt{n}} < 1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Minthogy $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$, a rendőrszabály szerint $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{n}} = 1$. Ezzel beláttuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{n}}$ létezik, s értékét is megadtuk.