I. megoldás. Ha $x \geqq 1$, akkor $\sqrt{x} \geqq 1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 0$, tehát

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x + \sqrt{x} > 1.$$

Ha $0 < x < 1$, akkor legyen az n olyan pozitív egész, amelyre

$$\frac{1}{n+1} < x \leqq \frac{1}{n}.$$

Az $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ függvény szigorúan monoton csökken, erre az n egészre tehát

(1) $$\left(\frac{1}{2}\right)^x \geqq \left(\frac{1}{2}\right)^{1/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}.$$

Ismeretes, hogy ha $a > 0$, akkor $\sqrt[n]{a} \leqq 1 + \frac{a-1}{n}$. (Bal oldalt $n-1$ darab 1-es és az a szám mértani közepe, jobb oldalt pedig ugyanennek az n darab számnak a számtani közepe áll.) Ezt $a = 2$-re alkalmazva $\sqrt[n]{2} < \frac{n+1}{n}$, tehát $\frac{1}{\sqrt[n]{2}} > \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$. Az (1) egyenlőtlenséggel összevetve azt kapjuk, hogy

(2) $$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Másrészt $0 < x < 1$ esetén $\sqrt{x} > x$, és tudjuk, hogy $x > \frac{1}{n+1}$. Innen

$$\sqrt{x} > \frac{1}{n+1}.$$

Ezt a (2) egyenlőtlenséghez hozzáadva éppen a bizonyítandó állításhoz jutunk.

II. megoldás. Elég a $0 < x < 1$ esettel foglalkoznunk (hiszen $x \geqq 1$ esetén $\sqrt{x} \geqq 1$ és $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 0$). Ebben az esetben $\sqrt{x} > x$, tehát elég belátnunk, hogy

(3) $$\left(\frac{1}{2}\right)^x + x > 1,$$

ha $0 < x < 1$. Tekintsük az $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + x = 2^{-x} + x$ függvényt. Ennek deriváltja $f'(x) = -\ln 2 \cdot 2^{-x} + 1$. Ha $x > 0$, akkor $2^{-x} < 2^0 = 1$, mert a 2^{-x} függvény szigorúan monoton csökken. Következésképp $-\ln 2 \cdot 2^{-x} > -\ln 2$, így $x > 0$ esetén $f'(x) > 1 - \ln 2 > 0$. Ha a derivált függvény egy intervallumban pozitív, akkor ott a függvény szigorúan monoton nő, tehát $f(x)$ szigorúan monoton nő a $(0, +\infty)$ félegyenesen. Így $x > 0$ esetén $f(x) > f(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 0 = 1$, amiből $\left(\frac{1}{2}\right)^x + x > 1$ következik *minden* pozitív x-re, így $0 < x < 1$ esetén is. – Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Cynolter Gábor (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)
dolgozata alapján

III. megoldás. Ismét azt bizonyítjuk, hogy $\left(\frac{1}{2}\right)^x + x > 1$, ha $0 < x < 1$. Ha $x > 0$, akkor $2^{-x} > e^{-x}$. Elég tehát azt belátnunk, hogy

(4) $$e^{-x} + x > 1 \quad \text{ha} \quad 0 < x < 1.$$

Bebizonyítjuk, hogy ha $y \neq 0$ és $y > -1$, akkor

(5) $$e^y > 1 + y.$$

Ebből $y = -x$ helyettesítéssel (4), s így a feladat állítása következik. Ismeretes, hogy

$$e^y = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n.$$

Belátjuk, hogy ha $y > -1$ és $y \neq 0$, akkor az $a_n = \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n$ sorozat szigorúan monoton nő, azaz

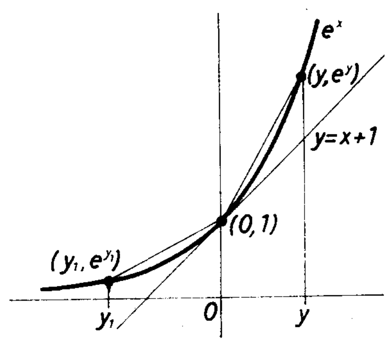
$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{y}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{n+1+y}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Vonjunk mindkét oldalból $n+1$-edik gyököt:

$$\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n \cdot 1} < \frac{n+1+y}{n+1}. \tag{6}$$

A bal oldal n darab $1 + \frac{y}{n}$ és egy darab 1-es mértani közepe, a jobb oldal pedig ugyanennek az $n+1$ számnak a számtani közepe. E számok nem mind egyenlők, mert $y \neq 0$, és mind pozitívak, mert $y > -1$, így fennáll köztük a (6) egyenlőtlenség. Ezzel beláttuk, hogy ha $y \neq 0$, $y > -1$, akkor az $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = a_n$ sorozat szigorúan monoton nő, tehát $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n > a_1$, ami éppen az (5) egyenlőtlenség.

Megjegyzések. 1. Az (5) egyenlőtlenség szerint $\frac{e^y - 1}{y} > 1$, ha $y > 0$, és $\frac{e^y - 1}{y} < 1$, ha $y < 0$. Az e^x függvény görbéjének 1 és y abszcisszájú pontját összekötő húr meredeksége tehát 1-nél nagyobb, ha $y > 0$ és 1-nél kisebb, ha $y < 0$.



Az e^x függvény grafikonjának 0 abszcisszájú pontjában az érintő éppen 1 meredekségű, az (5) egyenlőtlenség tehát azt fejezi ki, hogy a függvény grafikonja az $x = 0$ pont kivételével mindenütt a 0 abszcisszájú pontban húzott érintő fölött van. Ez pedig következik az e^x függvény konvexitásából is.