Adott a_n és b_n sorozatokhoz tekintsük a $d_n=(a_n+b_n)^2-4a_nb_n=(a_n-b_n)^2$ sorozatot. Amennyiben az (a_n+b_n) és az (a_nb_n) sorozatok konvergensek, úgy (d_n) is az, és a határértékszámítás elemi összefüggései szerint $\lim\limits_{n\to\infty} d_n=\lim\limits_{n\to\infty}[(a_n+b_n)^2-4a_nb_n]=B^2-4A$. A (d_n) elemei nemnegatív számok, így a sorozat határértéke sem lehet negatív. Az $(A,\ B)$ számpár tehát csak akkor teljesíti a feladat követelményeit, ha $B^2\geqq 4A$.

Megmutatjuk, hogy a talált feltétel elégséges: ha $B^2\geqq 4A$, akkor létezik olyan (a_n) illetve (b_n) sorozat, amelyek szorzata A-hoz, összege pedig B-hez tart.

Tekintsük ugyanis az $\alpha=\dfrac{B+\sqrt{B^2-4A}}{2}$ és a $\beta=\dfrac{B-\sqrt{B^2-4A}}{2}$ számokat. Mivel $\alpha\beta=A,\ \alpha+\beta=B$, az $a_n=\alpha,\ b_n=\beta$ sorozat nyilván megfelelő.

Az is látszik, hogy ha csak annyit írunk elő, hogy $\{a_n,\ b_n\}=\{\alpha,\ \beta\}$ minden n-re, akkor szintén ilyen sorozatokat kapunk. Ez azt jelenti, hogy ha $\alpha\neq\beta$, azaz $B^2>4A$, akkor van olyan (a_n) és (b_n) sorozat, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n=A$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=B$, bár maguk a sorozatok nem konvergensek. Ilyen sorozatokat kapunk, ha például a fenti konstans sorozatok minden második elemét kicseréljük, azaz páros n-re $a_n=\alpha,\ b_n=\beta$, páratlan n-re pedig $a_n=\beta,\ b_n=\alpha$. A feladat második kérdésére tehát a $B^2>4A$ esetben tagadó a válasz.

Ha $B^2=4A$, akkor a megoldás első részében vizsgált (d_n) sorozat határértéke 0, tehát $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$ is igaz. Így $a_n=\dfrac{a_n+b_n}{2}+\dfrac{a_n-b_n}{2}$ konvergens sorozatok összegeként maga is konvergens és hasonlóan $b_n=\dfrac{a_n+b_n}{2}-\dfrac{a_n-b_n}{2}$ is az. Ilyenkor nyilván $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\dfrac{B}{2}$.

Megjegyzések: 1. A megoldás másképpen is megfogalmazható. Mivel az $a_nb_n=u_n,\ a_n+b_n=v_n$ egyenletrendszernek (a_n és b_n az ismeretlenek) minden n-re létezik megoldása, ezért a gyökök és együtthatók összefüggései alapján felírható másodfokú egyenletek diszkriminánsa, $v_n^2-4u_n\geqq 0$. Ekkor pedig ez ennek a sorozatnak a határértékére is teljesül: $B^2-4A\geqq O$.

2. A $B^2\geqq 4A$ esetben természetesen nem csak a megoldásban adott (a_n) és (b_n) sorozatok megfelelők. Tetszőleges $\alpha_n\to\alpha,\ \beta_n\to\beta$ sorozatokból indulva bármely olyan (a_n), (b_n) sorozatra teljesül a feltétel, amelyre $\{a_n,\ b_n\}=\{\alpha n,\ \beta n\}$. Általában pedig csak annyit állíthatunk, hogy a feltételnek megfelelő (a_n) és (b_n) sorozatok mindegyikének van torlódási pontja, egyesítésüknek pedig α és β a torlódási pontjai.