I. megoldás. Megmutatjuk, hogy minden háromszögben

$$f_c \leqq \sqrt{s(s-c)} \leqq s_c, \tag{1}$$

és (1)-ben pontosan akkor teljesül egyenlőség, ha a C csúcsból induló oldalak egyenlők, azaz $a=b$. Ebből a bizonyítandó állítás már következik, ha a három szögfelezőre és súlyvonalra felírjuk (1)-et, és az egyenlőtlenségeket összeszorozzuk. Ekkor ugyanis

$$f_a \cdot f_b \cdot f_c \leqq \sqrt{s^3(s-a)(s-b)(s-c)} \leqq s_a \cdot s_b \cdot s_c$$

adódik, és Hérón tétele szerint a négyzetgyök alatt éppen $(s\cdot t)^2$ áll. Az is látható, hogy a bizonyítandó állításban pontosan akkor van egyenlőség, ha a háromszög bármely két oldala egyenlő, azaz a háromszög szabályos.

Az (1)-ben szereplő $\sqrt{s(s-c)}$ mennyiséget nehéz közvetlenül becsülni. Belátjuk viszont, hogy

$$\sqrt{s(s-c)} = \sqrt{ab}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}. \tag{2}$$

1987-11-365-1.eps

1. ábra

Az 1. ábráról leolvasható, hogy $\cos\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{s}{CO_c} = \dfrac{s-c}{CO}$, ahol O_c az AB oldalt kívülről érintő hozzáírt kör középpontja. Az egyenlőségeket összeszorozva

$$\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{s(s-c)}{CO\cdot CO_c} \tag{3}$$

adódik.

A megfelelő szögek egyenlőségéből kapjuk, hogy a CBO és a CO_cA háromszögek hasonlók. Ebből $\dfrac{CO}{a} = \dfrac{b}{CO_c}$, azaz $CO\cdot CO_c = ab$ következik, amit (3)-mal egybevetve kapjuk, hogy

$$s(s-c) = ab\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2},$$

ami $\cos\dfrac{\gamma}{2} > 0$ miatt (2)-vel ekvivalens.

A bizonyítandó (1) egyenlőtlenséget ezután az

$$f_c \leqq \sqrt{ab}\,\cos\frac{\gamma}{2} \leqq s_c \tag{4}$$

formában látjuk be. Ha $a=b$, akkor (4)-ben egyenlőség áll. Ha a két oldal nem egyenlő, akkor legyen a a nagyobbik.

1987-11-365-2.eps

2. ábra

Bocsássunk merőlegest a C-n átmenő külső szögfelezőre A-ból és B-ből, és legyenek a talppontok A_1, illetve B_1 (2. ábra). Ekkor az AA_1B_1B derékszögű trapéz alapjai párhuzamosak f_c-vel, hosszuk így $a\cdot\cos\dfrac{\gamma}{2}$, illetve $b\cdot\dfrac{\gamma}{2}$.

Jelölje E és F a C-ből induló szögfelező, illetve a súlyvonal talppontját az AB oldalon. Ekkor $\dfrac{AE}{EB} = \dfrac{b}{a} < \dfrac{AF}{FB} = 1$, így az AB oldalt $\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ arányban osztó P pont az EF szakasz belső pontja.

Húzzunk most párhuzamost a trapéz alapjaival a P-n és az F-en keresztül, és messék ezek a trapéz másik szárát P_1-ben, illetve F_1-ben. Ekkor nyilván $f_c = CE < P_1P < F_1F < FC = s_c$. Ha megmutatjuk, hogy PP_1 éppen a trapéz alapjainak mértani közepe, azaz $\sqrt{ab}\cdot\cos\dfrac{\gamma}{2}$, akkor készen vagyunk. Ez viszont következik abból a jól ismert tényből, hogy egy trapézban, melynek alapjai u és v, a szárakat $\lambda:\mu$ arányban osztó szakasz hossza (3. ábra)

$$\frac{\lambda+\mu v}{\lambda+\mu}. \tag{5}$$

1987-11-366-1.eps

3. ábra

Jelenleg ugyanis $\lambda : \mu = \sqrt{\frac{b}{a}} : 1$, és ezért

$$PP_1 = \frac{\sqrt{\frac{b}{a}} \cdot a \cdot \cos\frac{\gamma}{2} + b \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{\frac{b}{a}} + 1} = \sqrt{ab} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$$

valóban.

Megjegyzés. Ismert egyenlőtlenségekre hivatkozva gyorsabban is célhoz érhetünk, ha felhasználjuk az $f_c = \frac{2ab}{a+b} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$ összefüggést. Eszerint az AA_1B_1B trapézban f_c az alapok harmonikus közepe. Ugyanitt FF_1 középvonal, és így az alapok számtani közepével egyenlő, ami a CFF_1 derékszögű háromszög befogójaként rövidebb az FC átfogónál, ami nem más, mint s_c. A bizonyítandó állítás most már a harmonikus, mértani és számtani közepekre vonatkozó egyenlőtlenségekből adódik.

II. megoldás. Ismert összefüggések következetes alkalmazásával is eljuthatunk (1) bizonyításáig.

$$0 < \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\ \gamma}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{2ab}{2ab} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)},$$

ahol a négyzetgyök alatt $\cos\ \gamma$-t a koszinusztétel szerint írtuk fel. Tovább alakítva

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{(a+b)^2 - c^2}{ab}} = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{1}{ab}} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}},$$

azaz megkaptuk az első megoldás (2) egyenlőségét.

Az ismert $f_c = \frac{2ab}{a+b} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$ összefüggésbe helyettesítve kapjuk, hogy $f_c = \frac{\sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2}} \cdot \sqrt{s(s-c)}$. A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség szerint az első tényező legfeljebb 1, így f_c valóban nem lehet nagyobb, mint $\sqrt{s(s-c)}$.

A C-ből induló súlyvonalra ugyancsak a koszinusztételből

$$s_c^2 = b^2 + \frac{c^2}{4} - 2b\frac{c}{2} \cdot \cos\ \alpha, \quad \text{és mivel} \quad \cos\ \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

ezért

$$s_c^2 = b^2 + \frac{c^2}{4} - 2b\frac{c}{2} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + a^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

Végül a számtani és a négyzetes közép között fennálló egyenlőtlenséget felhasználva

$$s_c^2 \geqq \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{c^2}{4} = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} = s(s-c).$$

Ezzel az (1)-ben szereplő második egyenlőtlenséget is igazoltuk, és az is látszik, hogy (1)-ben pontosan akkor állnak egyenlőségek, ha $a = b$.