I. megoldás. Használjuk az $u=\sqrt[5]{x-6}$ és a $v=\sqrt[5]{39-x}$ jelöléseket. Az egyenlet bal oldala ekkor

$$(v^5u-u^5v)/(v-u)=uv(v^4-u^4)/(v-u)=uv(u+v)(u^2+v^2)$$

alakba írható. Másrészt

$$u^5+v^5=(u+v)(u^4-u^3v+u^2v^2-uv^3+v^4).$$

A következő egyenletrendszert kapjuk u-ra és v-re:

$$uv(u+v)(u^2+v^2)=30, \tag{1}$$

$$(u+v)(u^4-u^3v+u^2v^2-uv^3+v^4)=33. \tag{2}$$

A második egyenletben is célszerű a bal oldal második tényezőjét u^2+v^2 és uv polinomjaként felírni:

$$u^4-u^3v+u^2v^2-uv^3+v^4=(u^2+v^2)^2-u^2v^2-uv(u^2+v^2).$$

Ha most a második egyenletet osztjuk az elsővel, akkor az

$$\frac{u^2+v^2}{uv}-\frac{uv}{u^2+v^2}-1=1,1$$

egyenlethez jutunk. (Az első egyenlet jobb oldala pozitív, így az osztásnál nem vesztettünk gyököt). A $z=\frac{u^2+v^2}{uv}=\frac{u}{v}+\frac{v}{u}$ változóra tehát a $z-\frac{1}{z}=2,1$ egyenletet kapjuk. Ennek két megoldása $z=2,5$ és $z=-0,4$. Egy szám és a reciprokának összegeként viszont z nem eshet -2 és 2 közé, így csak

$$z=\frac{u}{v}+\frac{v}{u}=2,5 \quad \text{lehetséges.}$$

Ez $\frac{u}{v}$-re másodfokú egyenlet, amelynek két megoldása 2 és $\frac{1}{2}$. A feladat egyenletét tehát csak olyan x elégítheti ki, amelyre

$$\frac{u}{v}=\sqrt[5]{\frac{x-6}{39-x}}=2 \quad \text{vagy} \quad \sqrt[5]{\frac{x-6}{39-x}}=\frac{1}{2}.$$

E két elsőfokú egyenletet megoldva $x_1=38$ és $x_2=7$. Behelyettesítéssel meggyőződhetünk, hogy mindkét érték valóban megoldása a feladatnak. **II. megoldás.** Ismét az (1)és (2) egyenletrendszert oldjuk meg. $u+v$ nem lehet nulla, hiszen különben u^5+v^5 is nulla volna. Szorozzuk tehát (1)-et $\frac{11}{u+v}$-vel, (2)-t $\frac{10}{u+v}$-vel, és vonjuk ki az első kapott egyenletet a másodikból. Ekkor a

$$-11uv(u^2+v^2)+10(u^4-u^3v+u^2v^2-uv^3+v^4)=0$$

egyenlethez jutunk. Rendezzük a bal oldalt:

$$10u^4-21u^3v+10u^2v^2-21uv^3+10v^4=0.$$

Itt $v\neq 0$, hiszen különben a feladat egyenletének bal oldala is nulla volna. Oszthatunk tehát v^4-nel, s ekkor $\frac{u}{v}=t$-re a

$$10t^4-21t^3+10t^2-21t+10=0 \tag{3}$$

negyedfokú, úgynevezett *reciprok egyenletet* kapjuk. Ezt a szokásos módon oldjuk meg: először osztunk t^2-tel, így a bal oldal

$$10\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)-21\left(t+\frac{1}{t}\right)+10=10\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-21\left(t+\frac{1}{t}\right)-10$$

alakba írható, azaz $t+\frac{1}{t}$-re (ismét) a

$$10\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-21\left(t+\frac{1}{t}\right)-10=0$$

másodfokú egyenletet kapjuk.

$\left(t+\frac{1}{t}\right)$ éppen az előző megoldásbeli z, így az első megoldás befejezése szerint $t+\frac{1}{t}=2,5$, ahonnan a két megoldás 38 és 7.

Megjegyzés. Sokan eljutottak az $uv(u+v)(u^2+v^2)=30$ egyenlethez, de ezután felhasználták az egyértelmű prímfelbontást, azaz feltették, hogy u és v egész szám. A feladat azonban az *összes* valós megoldás megkeresése volt. (Más kérdés, hogy a megoldás során *kiderül*, hogy u és v egész.)