Jelöljük az a hosszúságú él végpontjait A-val és B-vel, a másikéit C és D-vel, a felezőpontok legyenek P és Q. Használjuk az ábra egyéb jelöléseit is.

1987-09-258-1.eps

Szerkesszük meg a tetraéder köré írt paralelepipedont, vagyis azt a testet, amelyet a tetraéder kitérő élpárjaira illesztett párhuzamos síkok határolnak. E paralelepipedon egyik lapjának átlója az $AB=a$ szakasz, és ennek a lapnak a másik átlója b hosszúságú. Ezért a lap területe $\frac{1}{2}ab\cdot\sin\varphi$. Jelöljük a tetraéder térfogatát V-vel.

Ismeretes, hogy a körülírt paralelepipedon térfogata háromszor akkora, mint a tetraéderé. Nyilvánvaló továbbá, hogy a paralelepipedon említett lapjához tartozó magassága – jelöljük ezt m-mel –, legfeljebb akkora lehet mint k, azaz $m\le k$. Egyenlőség itt csak akkor állhat, ha PQ merőleges a paralelepipedon AB-t, illetve CD-t tartalmazó lapjaira, és akkor PQ AB-re és CD-re is merőleges. Ezek után a paralelepipedon térfogatát a következőképpen becsüljük:

$$3V=\frac{1}{2}ab\cdot(\sin\varphi)\cdot m\le\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot k,$$

hiszen $\sin\varphi\le 1$, ahonnan kapjuk, hogy $V\le\frac{a\cdot b\cdot k}{6}$. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $\sin\varphi=1$ és $m=k$, ezek együtt pontosan akkor teljesülnek, ha AB és CD mind egymásra, mind PQ-ra merőlegesek. Könnyű látni, hogy ilyen tetraéder létezik.

A felszín becsléséhez vegyük figyelembe, hogy a tetraédert két, az $AB=a$ élre, és két, a $CD=b$ élre illeszkedő háromszög határolja. Mivel egy háromszögben egy adott oldalhoz tartozó magasság hossza nem nagyobb, mint az ugyanahhoz az oldalhoz tartozó súlyvonal, a háromszög területe a szokásos jelölésekkel legfeljebb $\frac{1}{2}\cdot a\cdot s_a$.

Jelöljük a tetraéder felszínét A-val. Az előbbiek szerint ekkor

$$A\le\frac{a(x+y)}{2}+\frac{b(r+s)}{2},$$

ahol $x,\ y,\ r,\ s$ mindegyike egy tetraéderlap megfelelő súlyvonalszakasza. Írjuk fel a PQD, illetve PQC háromszögekre a koszinusztételt:

$$x^2=k^2+\frac{b^2}{4}-kb\cdot\cos\alpha,\quad y^2=k^2+\frac{b^2}{4}+kb\cdot\cos\alpha,$$

ahol α a $DQP\sphericalangle$-et jelenti. A két egyenletet összeadva kapjuk, hogy

$$x^2+y^2=2\left(k^2+\frac{b^2}{4}\right). \tag{1}$$

A számtani és a négyzetes közép közötti egyenlőtlenség szerint

$$\frac{x+y}{2}\le\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}},$$

ezért (1) felhasználásával

$$\frac{x+y}{2}\le\sqrt{k^2+\frac{b^2}{4}},$$

és hasonlóan

$$\frac{r+s}{2}\le\sqrt{k^2+\frac{a^2}{4}}.$$

Ezek alapján

$$A\le a\sqrt{k^2+\frac{b^2}{4}}+b\sqrt{k^2+\frac{a^2}{4}}.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha az $x,\ y,\ r,\ s$ szakaszok egyben magasságok is a megfelelő háromszögekben, továbbá, ha $x=y$ és $r=s$. Ez azt jelenti, hogy AB és CD mind egymásra, mind PQ-ra merőlegesek, vagyis a tetraéder felszíne és térfogata egyszerre maximális.