

I. megoldás. Legyenek a láda élei a , b , és c . Ahhoz, hogy a láda „párhuzamosan” elhelyezett téglákkal is megtölthető legyen, szükséges, hogy az élek egyike 4-gyel, egy másik él pedig 2-vel legyen osztható. Bebizonyítjuk, hogy ha ez a feltétel nem teljesül, akkor a láda egyáltalán nem tölthető ki olyan egybevágó téglákkal, amelyek élének aránya $1 : 2 : 4$.

Válasszuk egységnek a téglák legrövidebb élét. Ekkor egy téglák köbtartalma 8 térfogategység, ezért csak olyan láda tölthető meg a téglákkal, amelynek abc térfogata osztható 8-cal. Ha most a , b , c -re nem teljesül a fenti feltétel, akkor a következő két eset lehetséges:

1. egy él osztható 8-cal, a többi pedig páratlan;
2. mindhárom él mérőszáma páros, de egyikük sem osztható 4-gyel.

Megmutatjuk, hogy ebben a két esetben a láda nem tölthető meg téglákkal.

Az 1. esetben legyen a 8-cal osztható él a . Ekkor az a -ra merőleges lédalap területe, $b \cdot c$ páratlan. Mivel egy téglák lapjai 2, 4 illetve 8, tehát páros egység területűek, a $b \cdot c$ területű lédalap nem rakható ki ilyenekkel, így ebben az esetben a láda sem tölthető meg a téglákkal.

A 2. esetben $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$ egyaránt páratlan. Osszuk fel a ládát a lapjaival párhuzamos síkokkal 2 egység élű kockákra. A kockák száma $\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{c}{2}$, tehát páratlan.

Színezzük ki a kockákat *sakktáblaszerűen*, vagyis úgy, hogy két közös lapú kocka egyike világos, a másika pedig sötét legyen.

Azt állítjuk, hogy a kitöltésben részt vevő bármely téglának ugyanakkora térfogatú része helyezkedik el világos kockákban, mint sötétekben. Ha ugyanis a szóban forgó téglát kettévágjuk a leghosszabb élét felező síkkal, és az egyik féltéglát a másik helyére toljuk, akkor mindenütt ellentétes színű részek kerülnek egymás helyére, hiszen az élekkel párhuzamos 2 egység hosszúságú eltolás minden kockát szomszédos, tehát más színű kockába visz. Ha tehát a láda megtölthető téglákkal, akkor a világos és sötét színű kockák száma egyenlő, számuk tehát összesen páros.

A 2. esetben ez nem teljesül, így ekkor sem létezhet a láda kitöltése. A bizonyítást ezzel befejeztük.

II. megoldás. Tekintsünk egy olyan a , b , c élű ládát, amely megtölthető az adott típusú téglákkal. Válasszuk hosszegységnek a legrövidebb téglalélt. Azt kell bebizonyítanunk, hogy az a , b , c mérőszámok között van egy 4-gyel osztható, és egy másik, ami páros. Az $a \cdot b$, $a \cdot c$, $b \cdot c$ szorzatok mind párosak, mert mindegyikük egy-egy lédalap területe, és a láda megtöltésekor minden lédalapot 2, 4, illetve 8, tehát páros területű téglalapok borítanak be. Az a , b , c számok közül így legalább kettő páros. Ha van közöttük páratlan, akkor a két páros egyike 4-gyel is osztható lesz, hiszen $a \cdot b \cdot c$ osztható 8-cal. Ebben az esetben tehát a láda valóban megtölthető „párhuzamosan” elhelyezett téglákkal.

Az az eset maradt még hátra, amikor a , b és c mindegyike páros. Elegendő lenne azt megmutatnunk, hogy ekkor szorzatuk osztható 16-tal is, hiszen így egyikük biztosan osztható 4-gyel.

Vágjuk fel a ládát egységkockákra. Minden ilyen kockához rendeljünk három „koordinátát”, amelyek megmutatják, hogy három, egy csúcsban találkozó lédalappal párhuzamos rétegek közül e lédalapoktól számítva hányadikban van az adott kocka. Számoljuk ki a ládát alkotó kockák „koordinátáinak” az összegét.

Az a , b élek meghatározta lédalappal párhuzamos minden egyes rétegben $a \cdot b$ darab kocka van, ezért az a , b élek síkjától számított koordináták összege

$$a \cdot b + 2a \cdot b + \dots + c \cdot a \cdot b = a \cdot b(1 + 2 + \dots + c) = a \cdot b \frac{c(c+1)}{2}.$$

A többi koordinátát hasonlóan összegezve kapjuk, hogy a kockák koordinátáinak összege

$$a \cdot b \frac{c(c+1)}{2} + a \cdot c \frac{b(b+1)}{2} + b \cdot c \frac{a(a+1)}{2} = \frac{1}{2} \cdot abc(a+b+c+3).$$

Tekintsük most a megtöltött láda egy tégláját. Ez nyolc kockából áll, amelyek közül az egyik sarokkocka koordinátái a legkisebbek. Ha ezeknek a koordinátáknak az összege k , akkor a téglát alkotó nyolc kocka koordinátáinak összege $8k + 16$, ugyanis a nyolc kocka koordinátaösszege rendre 0, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4 értékkel haladja meg a k összeget. Egy-egy téglában tehát a kockák teljes koordinátaösszege osztható 8-cal, ezért ugyanez a ládát kitöltő kockák teljes koordinátaösszegére is fennáll, ami a fentebb fölírt kifejezés. Minthogy a , b , c most páros számok, $a + b + c + 3$ pedig páratlan, ezért abc valóban osztható 16-tal, és így most is van az élek között 4-gyel osztható.