

I. megoldás. Fel fogjuk használni a KÖMAL 1986. évi 4. számában megjelent „A lámpácskás játékról” című cikkben bizonyított, könnyen belátható tételeket. Eszerint egy gombnyomássorozat után előálló minta nem függ attól, hogy a gombokat milyen sorrendben nyomtuk meg; egy gomb kétszeri megnyomása pedig nem változtat a mintán, tehát ha egy gombnyomássorozatban a páros sokszor lenyomott gombokat nem nyomnánk le, a páratlan sokszor lenyomottakat pedig csak egyszer, akkor ugyanazt a mintát kapnánk. Minden gombnyomássorozat helyett tehát tekinthetünk egy ún. lenyomásmintát, amelyben a páros sokszor lenyomott gombok helyén 0, a páratlan sokszor lenyomottak helyén pedig 1 áll.

Legendő tehát azt belátni, hogy minden, legalább 18 darab 1-est tartalmazó lenyomásmintához tartozik egy 18-nál kevesebb 1-est tartalmazó, amely ugyanazt a világításmintát hozza létre.

1987-05-205-2.eps

1. ábra

Vegyünk egy tetszőleges, legalább 18 darab 1-est tartalmazó lenyomásmintát. Adjuk ehhez hozzá az 1. ábrán látható lenyomásmintát, amelyről könnyen belátható, hogy egyetlen lámpa állapotát sem változtatja meg. (Két lenyomásmintát úgy adhatunk össze, hogy az elemeket páronként modulo 2 összeadjuk – vagyis $1+1=0$ lesz. Nyilvánvaló, hogy két lenyomás-mintához tartozó egy-egy gombnyomássorozat egymás utáni elvégzésekor tulajdonképpen az összegként kapott lenyomásmintát hajtjuk végre.) Ez a lenyomás minta 16 darab 1-est tartalmaz, az eredeti legalább 18-at, így a 25 lámpa közül legalább $16+18-25=9$ helyén mindkét mintában 1-es fog állni, az összegként kapott lenyomás minta tehát legalább 9 darab 0-ást, azaz legfeljebb 16 darab 1-est tartalmaz.

Mivel az ábrán látható lenyomás minta minden lámpa állapotát változatlanul hagyja, az összegként kapott lenyomás minta ugyanazt a világításmintát állítja elő, mint az eredeti. Eszerint minden, legalább 18 darab 1-est tartalmazó lenyomásmintához találhatunk egy legfeljebb 16 (vagyis 18-nál biztosan kevesebb) 1-est tartalmazó lenyomásmintát, amely ugyanazt a világításmintát hozza létre; és ezt akartuk igazolni.

II. megoldás: Az előbbi módon elindulva a bizonyítást másképpen is befejezhetjük.

Tekintsünk egy tetszőleges lenyomásmintát. A benne szereplő 1-esek közül az 1. ábrán is 1-essel jelölt helyeken állók száma legyen a , a 0-val jelölt helyeken állóké pedig b ($a \leq 16$, $b \leq 9$). A lenyomásmintában ekkor $a+b$ darab 1-es szerepel. Ha hozzáadjuk az 1. ábrán szereplő lenyomásmintát, akkor az összegben $16-a+b$ darab 1-es szerepel. Ugyanaz a világításminta tehát $a+b$ és $16-a+b$ gomb lenyomásával is előáll.

Ezek számtani közepe $\frac{a+b+16-a+b}{2} = 8+b \leq 8+9 = 17$. Ha két szám számtani közepe nem nagyobb 17-nél, akkor a két szám sem lehet egyszerre nagyobb 17-nél, tehát vagy az eredeti, vagy az összegként kapott lenyomás mintában legfeljebb 17 darab 1-es áll.

Ezzel a gondolattal könnyen élesíthető az állítás, és belátható, hogy minden mintázat előállítható legfeljebb 15 gomb megnyomásával is.

Az említett cikkben láttuk, hogy a triviális (25 db 0-ból álló) lenyomásmintán kívül pontosan 3 olyan lenyomás minta van, amely nem változtat a lámpák állapotán:

1987-05-206-1.eps

2. ábra

Tekintsük most a 3. ábrán látható táblázatot. Látható, hogy a b , c , d betűk közül kettőt kiválasztva, és ezekre a helyekre 1-est, a többire 0-t írva éppen a 2. ábra 0-nyomásmintáit kapjuk.

1987-05-206-2.eps

3. ábra

Az idézett cikkben olvasható, hogy egy adott lenyomás minta által előállított világításmintát még három másik lenyomás minta állít elő, és ezeket úgy kapjuk, hogy az eredetihez a fenti három „0-minta” egyikét hozzáadjuk.

Tekintsünk most egy tetszőleges lenyomásmintát, és jelöljük a , b , c , d -vel a 3. ábra táblázatán a megfelelő betűvel jelölt helyeken álló 1-esei számát. A lenyomás-mintában így $a+b+c+d$ darab 1-es áll. A lenyomásmintához a fenti három 0-mintából egyet-egyet hozzáadva az összegekben az 1-esek száma rendre: $a+8-b+8-c+d$; $a+8-b+c+4-d$; $a+b+8-c+4-d$. A négy, azonos világításmintát előállító lenyomás mintában tehát az 1-esek számának átlaga $a+10 \leq 15$, vagyis van köztük olyan, amelyben legfeljebb 15 darab 1-es szerepel.

1987-05-206-3.eps

4. ábra

Az állítás tovább már nem élesíthető, hiszen ha 5 darab a , 4 darab b , 4 darab c és 2 darab d betű helyére írunk 1-est, akkor az így kapott lenyomás minta és mindhárom, vele azonos mintázatot létrehozó lenyomás minta 15–15 darab 1-est tartalmaz. (Pl. a 4. ábra mintázatát az 5. ábra lenyomás mintái állítják elő.)

1987-05-206-4.eps

5. ábra