A kérdés összefügg a 2518. feladattal és a 2304. gyakorlattal. (Megoldásuk az 1986. évi januári, illetve májusi számunkban olvasható.) Az utóbbi megoldásához fűzött megjegyzésből kiderül, hogy a mindkét esetben alkalmazott „kiegyensúlyozó eljárás” nem feltétlenül vezet eredményre. Tehát ha az adott számoknak mérősúlyokat feleltetünk meg, és ezeket nagyság szerint csökkenő sorrendben helyezzük egy két karú mérleg egy-egy serpenyőjébe, egyensúly esetén a bal oldaliba, egyébként pedig a könnyebbikbe téve a soron következőt, akkor a súlyok elfogytával nem minden esetben lesz egyensúlyban a két serpenyő.

Ha az eljárás „elakad”, azaz valamelyik serpenyőbe egy m tömegű súlyt felrakva itt túllépnénk a teljes tömeg felét, az 50 grammot, akkor eddigre mindkét serpenyőn legalább $50-(m-1)=51-m$ a súlyok együttes tömege, így legfeljebb $2m-2$ tömegű súly nincs még a mérlegen. A serpenyőkben lévő tömeg másrészt nyilván legfeljebb $100-m$, és így eddig az elakadásig legfeljebb

$$\left[\frac{100-m}{m}\right]=\left[\frac{100}{m}\right]-1$$

darab súlyt helyezhettünk el a mérlegen, hiszen a csökkenő sorrend miatt az eddig felhasznált súlyok mindegyike legalább m tömegű.

Így legalább $35-\left(\left[\frac{100}{m}\right]-1\right)=36-\left[\frac{100}{m}\right]\geqq 36-\frac{100}{m}$ darab súlyt kell még elhelyeznünk, és ezek együttes tömege az elakadás tényéből kiolvasott első becslés szerint legfeljebb $2m-2$. Pontosabban a „kritikus”, m tömegű súlytól eltekintve még legalább $35-\frac{100}{m}$ darab súly jut legfeljebb $m-2$ gramm tömegre.

Minden súly tömege legalább 1, ezért $35-\frac{100}{m}\leqq m-2$, azaz $m^2-37m+100\geqq 0$. Figyelembe véve, hogy m egész, ez akkor és csak akkor teljesül, ha $35\leqq m$ vagy $2\geqq m$.

Az $m\geqq 35$ eset nem lehetséges, hiszen ekkor a csökkenő sorrend miatt az elakadás előtt már mindkét serpenyőben volna egy-egy legalább 35 grammos súly és a „kritikus” m tömeggel együtt ezek összege legalább $3\cdot 35$, ami nagyobb 100-nál.

$m=1$ tömegű súllyal viszont már nem akadhat el az eljárás, ilyenkor ugyanis egyesével haladva egyik serpenyőben sem léphetjük át az 50 grammos tömeget.

Elakadás tehát valójában csak az $m=2$ esetben lehetséges, láthatóan úgy, ha mindkét serpenyőben 49 grammnyi súly gyűlt össze, és megmaradt egy 2 grammos súly. (1 grammos súlyunk ilyenkor egyáltalán nincsen.) Ez elő is fordulhat, például úgy, ha 30 darab 3 grammos és 5 darab 2 grammos súlyunk van. Megmutatható, hogy ilyenkor a két serpenyőben lévő súlyoknak létezik egy-egy olyan részhalmaza, amelyek össztömegének eltérése éppen 1 gramm. Ezt a két részhalmazt kicserélve a serpenyők eltérése 2 lesz, ami a megmaradt súllyal kiegyensúlyozható. Mi azonban most egy másik utat választunk.

Ha nincsen 1 grammos súly, akkor a 2 grammos súlyok száma nyilván legalább öt $(4\cdot 2+31\cdot 3>100)$. Tegyünk félre öt darabot a 2 grammos súlyok közül. Belátjuk, hogy a többi harminc súlynak létezik olyan részhalmaza, hogy az abban lévő súlyok együttes tömege 40 és 50 közé eső páros szám, és így a félretett 2 grammos súlyok felhasználásával 50 grammá egészíthető ki.

A megmaradó súlyok összege (90 gramm) és száma (30) is páros, így közöttük mind a páratlan, mind pedig a páros tömegű súlyok száma páros. Készítsünk tehát párokat a páratlan tömegű súlyokból és a páros tömegűekből is, és tekintsük az egyes párokba került súlyok összegét. Így 15 *páros* számot kapunk, mindegyikük legalább 4, összegük pedig 90. Megmutatjuk, hogy ezek között van néhány olyan, amelyek S összegére – ami nyilván páros – $40\leqq S\leqq 50$.

Legyen a 15 szám csökkenő sorrendben b_1, b_2, …, b_{15} és jelölje S_k az első k darab összegét. Mivel $b_1\geqq 4$, ezért $S_k=90-(b_{k+1}+\ldots+b_{15})\leqq 90-(15-k)\cdot 4=30+4k$, vagyis $S_5\leqq 50$. Ha $S_5\geqq 40$, akkor készen vagyunk.

Ha $S_5\leqq 38$, akkor $S_5\geqq 5\cdot b_5$ miatt $b_5\leqq\frac{38}{5}<8$, így ha $i\geqq 5$, akkor $b_i\leqq 6$. Eszerint ha egy 40-nél kisebb számot – S_4 – legfeljebb 6-osával növelve 90-ig – S_{15} – jutunk, akkor nem „ugorhatjuk át” a $[40,\ 50]$ számközt, lesz tehát olyan k, amelyre $40\leqq S_k\leqq 50$. Ezzel a bizonyítást befejeztük.