I. megoldás. Legyen az ABC háromszög területe T, kerületének fele s, a beírt kör A', B', C' érintési pontjai által meghatározott háromszög területe pedig t. A további jelöléseket az ábrán láthatjuk.

1987-09-255-1.eps

Ismeretes, hogy $AC'=s-a$, és így az ábra alapján $t_1=\frac{1}{2}(s-a)^2\sin\alpha$; $T=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$, ahonnan $t_1==T\cdot\frac{(s-a)^2}{bc}$. Hasonló összefüggéseket kapunk t_2-re és t_3-ra.

A keresett terület ezután $t=T-t_1-t_2-t_3$, ami az előbbieket fölhasználva:

$$t=T-T\cdot\frac{(s-a)^2}{bc}-T\cdot\frac{(s-b)^2}{ac}-T\cdot\frac{(s-c)^2}{ab}.$$

Ha most T-t kifejezzük a Hérón-képlettel, akkor kiemelés után a feladat követelményeinek megfelelő

$$t=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\left(1-\frac{(s-a)^2}{bc}-\frac{(s-b)^2}{ac}-\frac{(s-c)^2}{ab}\right)$$

összefüggéshez jutunk.

II. megoldás. Az $AC'OB'$ húrnégyszögben $B'OC'\sphericalangle=180^\circ-\alpha$, és így $T_1=\frac{1}{2}r^2\sin\alpha$. T_2 és T_3 hasonló kifejezésével (r a beírt kör sugara):

$$t=\frac{1}{2}r^2(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma). \tag{1}$$

Mivel pl. $T=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$, következik, hogy $\sin\alpha=\frac{2T}{bc}$, és hasonló igaz $\sin\beta$ és $\sin\gamma$-ra. Ezért (1) így írható:

$$t=\frac{r^2}{2}\left(\frac{2T}{bc}+\frac{2T}{ac}+\frac{2T}{ab}\right).$$

Emeljük ki T-t és használjuk fel a $T=rs$ összefüggést. Ekkor $t=\frac{T^3}{s^2}\cdot\frac{a+b+c}{abc}$, amiben T-t ismét a Hérón-képlet alapján helyettesítve:

$$t=\frac{2\cdot\sqrt{s\cdot(s-a)^3(s-b)^3(s-c)^3}}{abc}.$$