I. megoldás. Először azt bizonyítjuk, hogy ha a C-nél derékszög van, akkor teljesül az egyenlőség. Írjuk fel kétféleképpen a háromszög kétszeres területét: $2T = ab = mc$. Itt négyzetre emelve, majd $\frac{1}{m^2}$-et kifejezve s végül a Pitagorasz-tételt felhasználva valóban a kívánt egyenlőséget kapjuk.

$$\frac{1}{m^2} = \frac{c^2}{a^2b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}.$$

1987-05-202-1.eps

1. ábra

A feladat állítása azonban csak akkor lenne igaz, ha megfordítva, az (1) egyenlőségből következne, hogy a háromszögben C-nél derékszög van. Erre azonban könnyű ellenpéldát találni: legyen az ABC háromszögben C-nél derékszög, és legyen $b < a$. Ekkor az előbb bizonyítottak szerint $\frac{1}{m^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$. Ha az $AC = b$ oldalt tükrözzük az m magasság egyenesére, akkor az $A'C = b$ szakaszt kapjuk. Az így kapott BCA' háromszögben $A'C = b$, $BC = a$ és A' az AB szakaszon van, tehát a C-ből induló magasság változatlan, továbbra is m hosszúságú. Az (1) egyenlőség tehát továbbra is fennáll, másrészt most A'-nél tompaszög van, a C-nél tehát hegyesszög, a feladat állítása így nem igaz.

II. megoldás. Legyenek az a, b, c oldalakkal szemközti szögek rendre α, β, γ. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\alpha \leqq \beta$. Ekkor nyilván $\alpha < 90°$. Az (1) egyenlőség mindkét oldalát ab-vel végigszorozva az

$$\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{m} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

egyenlőséghez jutunk. Minden háromszögben igaz, hogy $\frac{m}{a} = \sin\beta$, $\frac{m}{b} = \sin\alpha$ és $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, tehát az egyenlőség így is írható :

$$\frac{1}{\sin\alpha} \cdot \frac{1}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Ha most mindkét oldalt megszorozzuk $\sin\alpha\ \sin\beta$-val, akkor az $1 = \sin^2\alpha + \sin^2\beta$ egyenlőséghez jutunk, ahonnan a $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ azonosság felhasználásával a $\sin^2\beta = \cos^2\alpha$ egyenlőséget kapjuk. Minthogy $0 < \alpha < 90°,\ 0 < \beta < 180°,\ \sin\beta$ és $\cos\alpha$ pozitív, tehát azt kapjuk, hogy $\sin\beta = \cos\alpha$. De $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$, így $\sin\beta = \sin(90° - \alpha)$. Ebből pedig az következik, hogy vagy $\beta = 90° - \alpha$, vagy $\beta = 180° - (90° - \alpha) = 90° + \alpha$, azaz vagy $\alpha + \beta = 90°$, vagy $\beta - \alpha = 90°$.

Könnyű látni, hogy a $0 < \alpha < 90°,\ \alpha \leqq \beta,\ 0 < \beta < 180°$ feltételek mellett átalakításaink ekvivalensek voltak, tehát az (1) egyenlőség két esetben teljesül: ha $\alpha + \beta = 90°$, tehát a C-nél derékszög van, vagy ha $\beta - \alpha = 90°$. (Ekkor β tompaszög, tehát γ hegyesszög.) A feladat állítása tehát nem igaz, az egyenlőség teljesül pl. az $\alpha = \gamma = 30°,\ \beta = 120°$-os háromszögre is.

III. megoldás. A feladatot egy szerkesztési feladatra vezetjük vissza. Adva van egy háromszög két oldala, a és b, továbbá tudjuk, hogy a C-ből induló m magasságra teljesül az (1) összefüggés. Szerkesszük meg a háromszöget!

(1) alapján $m = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ szerkeszthető. Ekkor ismerjük az ABC háromszög C-ből induló két oldalát, $CB = a$-t és $CA = b$-t, valamint a C-ből induló magasságát, m-et. Ekkor az ismert módon szerkeszthető a háromszög: $a = CB$, mint átfogó fölé szerkesztünk egy derékszögű háromszöget, amelynek egyik befogója m. Legyen ez a CBT háromszög és legyen $CT = m$. A BT egyenest a C körüli $b = CA$ sugarú körrel elmetszve két pontot kapunk, A-t és A'-t. Ezek a metszéspontok valóban létrejönnek, hiszen $m = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ miatt $b > m$ nyilván teljesül.

1987-05-203-1.eps

2. ábra

Ha $a = b$, akkor a metszéspontok egyike a B-vel esik egybe, minden más esetben két háromszöget kapunk: ABC-t és $A'BC$-t, és mindkettő megfelel. Világos az is, hogy a két háromszög közül csak az egyikben lehet a C-nél derékszög, hiszen $ACB\sphericalangle \neq A'CB\sphericalangle$. Ezért a feladat állítása nem igaz: (1)-ből nem következik, hogy G-nél derékszög van.

Megjegyzések: 1. A harmadik megoldást az elsővel összevetve trigonometria alkalmazása nélkűl is könnyen láthatjuk, hogy (1) két esetben teljesül: ha $\alpha + \beta = 90°$, vagy ha $\beta - \alpha = 90°$.

2. Azokat a megoldásokat tekintettük kiemelkedőnek, amelyek a szögekre vonatkozó szükséges és elégséges feltételt adtak arra, hogy (1) teljesüljön, s ennek alapján mutatták meg, hogy a feladat állítása nem igaz. Voltak sajnos olyanok is, akik a trigonometrikus egyenletek megoldásánál nem ekvivalens átalakításokat hajtottak végre, ezeket akkor sem vettük kiemelkedőnek, ha végül véletlenül helyes eredményre jutottak.