I. megoldás. Jelöljük a vizsgált összeget S-sel. Az összeg tagjai az $f(x) = = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ függvény egész helyeken fölvett értékei az $[1; 10\,000]$ intervallumban. Az f folytonos ebben az intervallumban, ezért ott integrálható. Tekintsük a következő integrálközelítő-összegeket:

$$A = \sum_{k=2}^{10\,000} f(k), \qquad F = \sum_{k=1}^{9999} f(k).$$

Ezekkel az integrál értéke becsülhető, éspedig

$$A = S - 1 < \int_1^{10\,000} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}} < F = S - \frac{1}{10}, \tag{1}$$

hiszen f a tekintett intervallumban pozitív és monoton fogy. Mivel

$$\int_1^{10\,000} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}} = 1332,$$

ezért (1) szerint $S - 1 < 1332 < S - 0{,}1$, azaz $1332{,}1 < S < 1333$, és így $[S] = 1332$.

II. megoldás. S egész részének meghatározásához fölhasználjuk a következő, minden pozitív egészre érvényes egyenlőtlenséget:

$$\frac{4}{3}\big((n+1)^{3/4} - n^{3/4}\big) < \frac{1}{\sqrt[4]{n}} < \frac{4}{3}\big(n^{3/4} - (n-1)^{3/4}\big). \tag{2}$$

Csak a bal oldali egyenlőtlenséget igazoljuk, a másik bizonyítása hasonlóan történhet. Osszuk ennek mindkét oldalát $\frac{4}{3} \cdot n^{3/4}$-nel. Rendezés után kapjuk, hogy a bizonyítandó állítás a

$$\sqrt[4]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3} < 1 + \frac{3}{4n} \tag{3}$$

egyenlőtlenséggel ekvivalens. A bal oldalon négy szám, az 1, $1+\frac{1}{n}$, $1+\frac{1}{n}$, $1+\frac{1}{n}$ mértani közepe, a jobb oldalon pedig ugyanezeknek a számtani közepe áll, és mivel a számok nem mind egyenlők, (3) valóban igaz.

Ezután S, illetve $S-1$ a következőképpen becsülhető:

$$S = \frac{1}{\sqrt[4]{10\,000}} + \frac{1}{\sqrt[4]{9999}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{1}} > \frac{4}{3}\,[(10\,001^{3/4} - 10\,000^{3/4}) +$$
$$+ (10\,000^{3/4} - 9999^{3/4}) + \ldots + (2^{3/4} - 1^{3/4})] = \frac{4}{3}\,[10\,001^{3/4} - 1].$$
$$S - 1 = \frac{1}{\sqrt[4]{10\,000}} + \frac{1}{\sqrt[4]{9999}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} < \frac{4}{3}\,(10\,000^{3/4} - 9999^{3/4}) +$$
$$+ (9999^{3/4} - 9998^{3/4}) + \ldots + (2^{3/4} - 1^{3/4}) = \frac{4}{3}\,[10\,000^{3/4} - 1] = 1332.$$

Azt kaptuk tehát, hogy $\frac{4}{3}(10\,001^{3/4} - 1) < S < 1333$. Mivel pedig

$$\frac{4}{3}(10\,001^{3/4} - 1) > \frac{4}{3}\,(10\,000^{3/4} - 1) = 1332,$$

azért $[S] = 1332$.

Megjegyzések. 1. A (2) egyenlőtlenség hátterében a $g(x) = x^{3/4}$ függvény konkáv volta áll, ugyanis $g'(x) = \frac{3}{4}x^{-1/4}$ alapján (2) a

$$g(x+1) - g(x) < g'(x) < g(x) - g(x-1) \tag{2'}$$

alakba írható. A $(2')$ két szélén a görbe egy-egy húrjának, közepén pedig az $\big(x,\ g(x)\big)$-beli érintőjének meredeksége áll.

2. Az I. megoldás módszerével általában is igazolható, hogyha $k \geq 2$, természetes szám, akkor

$$\frac{k}{k-1}\left(n^{\frac{k-1}{k}} - 1\right) + \frac{1}{\sqrt[k]{n}} < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[k]{i}} < \frac{k}{k-1}\left(n^{\frac{k-1}{k}} - 1\right) + 1.$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$\frac{(n+1)^x - 1}{x} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{\,1-x}} \le \frac{(n+1)^x}{x} - (n+1)^{x-1}, \quad \text{ahol} \quad 0 < x \le 1.$$