I. Megoldás. Megfelelő értelmezési tartományon ($x\ge -4$) az egyenlet két oldalán álló függvények egymás inverzei.

1987-09-252-1.eps

1. ábra

Várhatjuk tehát, hogy az $y=x$ egyenesen lesz a két görbének közös pontja (1. ábra), amelynek abszcisszájára $x^2-4=x$, azaz

$$x^2-x-4=0. \tag{2}$$

Az eredeti egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve rendezés után a következő egyenletet kapjuk:

$$x^4-8x^2-x+12=0. \tag{3}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy várakozásunknak megfelelően a (2) bal oldalán álló polinom osztója (3) bal oldalának, ezért az szorzattá alakítható:

$$(x^2-x-4)(x^2+x-3)=0.$$

Egyenletünk gyökei tehát az $x^2-x-4=0$ és az $x^2+x-3=0$ egyenletek gyökei közül kerülnek ki:

$$x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}\quad\text{vagy}\quad x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}.$$

A négyzetre emelés miatt hamis gyökök is felléptek, a 2-nél kisebb abszolút értékű gyököket ki kell zárnunk, hisz ekkor x^2-4 negatív. Az $x\ge -4$, $|x|\ge 2$ halmazon viszont (1) és (3) ekvivalens, így a megmaradt két gyök, $x_1=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$ és $x_2=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$ az egyenlet megoldása.

II. megoldás. Az $x\ge -4$ halmazon keressük az $y=x^2-4$ és $y=\sqrt{x+4}$ egyenletű görbék közös pontjainak abszcisszáját. A második egyenlet négyzetre emelése után kapott $y^2=x+4$ alakot vonjuk ki az első egyenletből: $x^2-y^2=-(x-y)$, amiből $(x-y)(x+y+1)=0$ adódik. A szorzat alakból pl. y kifejezhető, $y=x$ vagy $y=-x-1$. Ezeket az első egyenletbe helyettesítve ismét két másodfokú egyenlet megoldása a folytatás.

III. megoldás. Írjuk az adott egyenletet így:

$$x^2-4+x+4+\frac14=x+4+\sqrt{x+4}+\frac14.$$

Látható, hogy mindkét oldal teljes négyzet:

$$\left(x+\frac12\right)^2=\left(\sqrt{x+4}+\frac12\right)^2,$$

amiből $\sqrt{x+4}=x$ vagy $\sqrt{x+4}=-x-1$, és a folytatás hasonló, mint a II. megoldásban (2. ábra).

1987-09-253-1.eps

2. ábra