**I. megoldás.** Használjuk az ábra jelöléseit. A feladat természetéből következik, hogy $m>2$ és $FA=r>1$.

1987-05-200-1.eps

Pitagorasz-tétel szerint $a=\sqrt{m^2+r^2}$, az $ACF$ és $OCD$ háromszögek hasonlósága alapján pedig $a:r=(m-1):1$, ahonnan a szokásos módon

$$a=r(m-1). \tag{1}$$

Ezért $\sqrt{m^2+r^2}=(m-1)r$, és így $m^2+r^2=(m^2-2m+1)r^2$, azaz $m(m\cdot r^2-m-2r^2)=0$. Mivel $m>0$, ez csak akkor teljesülhet, ha $m\cdot r^2-m-2r^2=0$, vagyis

$$m=\frac{2r^2}{r^2-1}\quad (r>1). \tag{2}$$

(1) és (2) alapján

$$a=r\cdot\left(\frac{2r^2}{r^2-1}-1\right)=\frac{r^3+r}{r^2-1}. \tag{3}$$

Ismeretes, hogy a kúp felszíne $A=r\cdot\pi(r+a)$, amiből (3) felhasználásával „$A$" egyváltozós kifejezését nyerjük :

$$A=r\cdot\pi\cdot\left(r+\frac{r^3+r}{r^2-1}\right)=2\pi\frac{r^4}{r^2-1}.$$

„$A$" minimumának meghatározásához elegendő $\dfrac{r^4}{r^2-1}$ minimumát meghatározni, az $r>1$ feltétel mellett. Mivel $\dfrac{r^4}{r^2-1}=\dfrac{1}{\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^4}}$, ezért „$A$" akkor minimális, ha $\dfrac{1}{r^2}-\dfrac{1}{r^4}$ maximális. Ezt a maximumot a következőképpen határozhatjuk meg: $\dfrac{1}{r^2}-\dfrac{1}{r^4}=\left(\dfrac{1}{r^2}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$, és ez akkor maximális, ha $\dfrac{1}{r^2}=\dfrac{1}{2}$, és mivel $r>1$, $r=\sqrt{2}$, a maximum értéke pedig $\dfrac{1}{4}$.

Ezért a kúp felszínének minimuma létezik, és az $8\pi$.

**II. megoldás.** Az F. 2595. feladatban megmutattuk, hogy a gömb köré írt forgáskúp térfogata legalább kétszerese a gömb térfogatának.

*A Geometriai feladatok gyűjteménye* I. 2855.feladatából tudjuk, hogy a gömb köré írt forgáskúp felszínének mérőszáma 3-szorosa a térfogat mérőszámának. Ezért a térfogat és a felszín egyszerre minimális.

Az F. 2595. feladat megoldása szerint (lásd 1986. évi 10. szám) az egységsugarú gömb köré írt forgáskúp térfogatának minimuma $\dfrac{8}{3}\pi$ ezért a felszínének minimuma $3\cdot\dfrac{8}{3}\pi=8\pi$.

*Megjegyzés.* A minimum helyét a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséggel vagy deriválással is meg lehet határozni. Utóbbi esetben bizonyítani kell, hogy a derivált függvény zérushelye valóban minimumhely. Ezt több beküldő elmulasztotta. Néhányan úgy gondolták, hogy a minimális felszínű kúp egyenlő oldalú. Ez nem igaz.