I. megoldás. A színezést nem adjuk meg, csak létezését bizonyítjuk.

1-től 1986-ig 1986 természetes szám van, ezeket 2^{1986} félképpen lehet két színnel kiszínezni.

Most felső becslést keresünk a „rossz” színezések számára, tehát azokéra, amelyekben van 18 tagú, „egyszínű” számtani sorozat. Az ilyen színezéseket úgy kapjuk, hogy kiválasztunk egy 18 tagú számtani sorozatot, ezt a két szín valamelyikével egyszínűre színezzük, majd a többi 1968 számot tetszőlegesen kiszínezzük.

Így minden „rossz” színezést megkapunk, némelyiket (p1. a „csupa kéket”) többször is. Ha S-sel jelöljük a 18 tagú számtani sorozatok számát, akkor a rossz színezések száma tehát kisebb, mint $2S \cdot 2^{1986}$. Ha belátjuk, hogy ez a szám kisebb az összes színezések számánál, vagyis

$$S < 2^{17},$$

akkor készen vagyunk.

Számoljuk ki S-et! Egy számtani sorozatot egyértelműen meghatároz legkisebb eleme: a_1 és különbsége: $d(\geqq 1)$. Minthogy 18. tagja, $a_{18} = a_1 + 17d$, szintén nem lehet nagyobb 1986-nál, ezért $a_1 \leqq 1986 - 17d$. Rögzített d-re tehát a_1-et ennyiféleképpen választhatjuk meg, másrészt nyilván $d \leqq \left[\frac{1986}{17}\right] = 116$, tehát

$$S = \sum_{d=1}^{116}(1986 - 17d) = 116 \cdot 1986 - 17\sum_{d=1}^{116} d =$$
$$= 116 \cdot 1986 - 17 \cdot \frac{116 \cdot 117}{2} = 115014 < 2^{17},$$

amit bizonyítani akartunk.

II. megoldás. Színezzük ki a számokat a következő módon: legyen piros minden 7-tel és 17-tel nem osztható szám, valamint minden $7 \cdot 17$-tel osztható szám, és legyen kék az összes többi. Belátjuk, hogy ekkor a számok közt nincs egyszínű 18 tagú számtani sorozat.

A következő segédtételt használjuk: ha p prím és nem osztója d-nek,. akkor k, $k+d$, $k+2d$, $\ldots$, $k+(p-1)d$ ún. „teljes maradékrendszer mod p”, azaz sorra osztva őket p-vel, a maradékok (valamilyen sorrendben) a 0, 1, 2, $\ldots$, $(p-1)$ számok lesznek. (Minden maradékot pontosan egyszer kapunk meg.) Két ilyen alakú szám, mondjuk $k+id$, $k+jd$ $(i<j)$ maradéka ugyanis csak úgy lehetne egyenlő, ha különbségük, $(j-i)d$ osztható volna p-vel. De d nem osztható p-vel a feltevés szerint, és $0 < j - i \leqq j < p$ miatt$j-i$ sem osztható p-vel. Minthogy pedig p prim, $(j-i)d$ sem lehet osztható p-vel. Ezzel a segédtételt igazoltuk.

Legyen most $1 \leqq a_1 < a_2 \ldots < a_{18} \leqq 1986$ egy számtani sorozat. Ennek különbsége, $d < 7 \cdot 17 = 119$, mert különben $a_{18} = a_1 + 17d \geqq 17^2 \cdot 7 = 2023$ volna, ami nem lehet. d tehát nem lehet egyszerre osztható 7-tel és 17-tel (mert 7 és 17 relatív prímek).

Ha d nem osztható sem 7-tel, sem 17-tel, akkor az a_1, $a_2 = a_1+d$, $a_3 = a_1+2d$, $a_4 = a_1+3d$, $\ldots$, $a_7 = a_1+6d$ számok valamelyike a segédtétel szerint osztható 7-tel, ugyanígy az a_8, $a_9 = a_8 + d$, $\mathrm{a}_{10} = a_8 + 2d$, $\ldots$ $\mathrm{a}_{14} = a_8 + 6d$ számok egyike is. Van tehát két 7-tel osztható tagja a sorozatnak. Másrészt a segédtétel szerint e számok közül legföljebb egy lehet osztható 17-tel, így a sorozat 7-tel osztható tagjai között biztosan van olyan, amelyik nem osztható 17-tel, és így *kék*. Másfelől a sorozat három szomszédos eleme közül legalább kettő *nem* osztható 7-tel, így ezek egyike 17-tel sem osztható, és így *piros*.

Ha tehát d sem 7-tel, sem pedig 17-tel nem osztható, akkor bármely d differenciájú, 18 tagú – illetve már 14 tagú – számtani sorozatnak van piros és kék eleme is.

Hátravan még az az eset, ha d a 7 és a 17 közül pontosan az egyiknek többszöröse. Jelöljük ezt p-vel, a másik számot pedig q-val. Ekkor a sorozatnak vagy minden tagja osztható p-vel, vagy egyik sem. A segédtétel szerint viszont az első q darab elem között van q-val osztható és q-val nem osztható is, és ezek színe biztosan különböző.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzések. 1. A feladat megoldása megjelent a TIT „Matematikai versenyek, 1986” című kiadványában is. Sajnos igen kevés megoldónk tüntette fel dolgozatának ezt a forrását, pedig ezzel sok időt takaríthatott volna meg magának és a javítónak egyaránt. Ugyanis tökéletes megoldásnak fogadtuk el azt is, ha valaki semmi mást nem írt le, mint hogy hol található meg a feladat megoldása,

Ugyanakkor, bár a kiadványban két megoldás található, második megoldásért csak olyan versenyzőknek adtunk többletpontokat, akiknek legalább az egyik megoldása láthatóan önálló munka eredménye volt. A többletpontokat ugyanis a feladattal kapcsolatos többletmunka jutalmazására szeretnénk fenntartani.

2. Két versenyzőnk más, a feladat követelményeinek megfelelő színezést adott meg. *Durham Michael*(Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., III. o. t.) konstrukciója: az első 289 szám kék, kivéve a $17k+1$ alakúakat és $289 - 18 = 271$-et; a következő $16 \cdot 17 = 272$ szám piros, kivéve a $17k+1$ alakúakat és $289 + 272 - 18 = 543$-t stb. – Grallert Krisztina (Miskolc, Földes F. Gimn., IV. o. t.) az első számot pirosra színezte, a következő 2-t kékre, a következő 3-at pirosra s i. t., majd a 17 szomszédos piros szám után következő 16-ot kékre, ezután 15-öt pirosra, $\ldots$, 1-et pirosra, 1-et kékre $\ldots$ és így tovább. A színezések helyességét meglehetősen hosszadalmas volna igazolni, nem is próbálta meg egyik versenyző

sem, mi számítógéppel láttuk be. Indokolás hiányában természetesen nem adhattunk maximális pontszámot ezekre a megoldásokra.

M. B.

3. Megmutatható, hogy ha p prímszám – és a 17 az –, akkor az első $p \cdot 2^p$ darab pozitív egész még kiszínezhető két színnel úgy, hogy ne forduljon elő 18-tagú, egyszínű számtani sorozat. Esetünkben ez azt jelenti, hogy 1986 helyett még az első 2 228 224 pozitív egészre is igaz a feladat állítása.