Az $x \geqq \frac{1}{2}$ feltétel miatt a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás, így elég, ha a négyzetre emelés és rendezés után kapott következő egyenlőtlenségeket igazoljuk :

$$3x+2<\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+3x+2}<3x+3.$$

Könnyen látható a következő állítások helyessége:

$$\sqrt{x^2+x}=\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}<\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}=\left|x+\frac{1}{2}\right|=x+\frac{1}{2}; \tag{2}$$

$$\sqrt{x^2+2x}=\sqrt{(x+1)^2-1}<\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|=x+1; \tag{3}$$

$$\sqrt{x^2+3x+2}=\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}<\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2}=\left|x+\frac{3}{2}\right|=x+\frac{3}{2}, \tag{4}$$

(2), (3) és (4) összege pedig épp a jobb oldali egyenlőtlenséget adja.

Hasonló ötlettel igazolható a bal oldali egyenlőtlenség is. Az $x \geqq \frac{1}{2}$ feltételt minden esetben kihasználva :

$$\sqrt{x^2+x}\geqq\sqrt{x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}=\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}}>x+\frac{1}{4}; \tag{5}$$

$$\sqrt{x^2+2x}\geqq\sqrt{x^2+x+\frac{1}{2}}=\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}>x+\frac{1}{2}; \tag{6}$$

$$\sqrt{x^2+3x+2}\geqq\sqrt{x^2+\frac{5}{2}x+\frac{9}{4}}=\sqrt{\left(x+\frac{5}{4}\right)^2+\frac{11}{6}}>x+\frac{5}{4}, \tag{7}$$

(5), (6) és (7) összege pedig éppen a másik bizonyítandó egyenlőtlenség.

*Megjegyzés. Bencze Mihály* brassói tanártól származik a feladat következő általánosítása:
Ha $x \geqq \frac{1}{2}$ és $n \geqq 1$ egész, akkor

$$\sqrt{(n+1)^2x+\frac{n(n+1)(2n+3)}{6}}<\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+\ldots+\sqrt{x+n}<$$
$$<\sqrt{(n+1)^2x+\frac{n(n+1)^2}{2}}.$$

Az alábbiakban vázoljuk a bizonyítást, ha $n \geqq 3$. A felső becslés közvetlenül adódik a $\sqrt{x}$, $\sqrt{x+1}$, $\ldots$, $\sqrt{x+n}$ számokra felírt számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenségből, itt csak $x \geqq 0$ szükséges.

Az alsó becsléshez tekintsük $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+\ldots+\sqrt{x+n}$ négyzetét.

$$\left(\sum_{i=0}^{n}\sqrt{x+i}\right)^2=(n+1)x+\frac{n(n+1)}{2}+2\cdot\sum_{0\leqq k<j\leqq n}\sqrt{(x+k)(x+j)}. \tag{*}$$

Könnyen látható, hogy ha $x \geqq \frac{1}{2}$, akkor $(x+k)(x+j) \geqq x+\frac{(4k+1)\cdot j+k}{2k+2j+2}$, és ezzel (*) jobb oldala csökkenthető. Így kapjuk, hogy

$$\left(\sum_{i=0}^{n}\sqrt{x+i}\right)^2\geqq(n+1)x+\frac{n(n+1)}{2}+n(n+1)x+2\cdot\sum_{0\leqq k<j\leqq n}\frac{(4k+1)\cdot j+k}{2k+2j+2} \tag{**}$$

Indukcióval belátható, hogy $n \geqq 3$ esetén a (**) jobb oldalán álló összegre fennáll az alábbi egyenlőtlenség :

$$\sum_{0 \leqq k<j \leqq n} \frac{(4k+1)j+k}{2k+2j+2} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} \frac{(4k+1)j+k}{2k+2j+2} > \frac{n^2(n+1)}{6}.$$

Ha tehát $n \geqq 3$, akkor összevonás és a kapott becslés szerint (**) az alábbit adja:

$$\left( \sum_{i=0}^{n} \sqrt{x+i} \right)^2 > (n+1)^2 x + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^2(n+1)}{3} = (n+1)^2 x + \frac{n(n+1)(2n+3)}{6},$$

ahonnan négyzetgyökvonás után a bizonyítandó állítást kapjuk.