I. megoldás. $n=1$ nyilván megfelel, $n=2$ nem: $\binom{1}{0}=\binom{1}{1}=1$ páratlan, de $\binom{2}{1}=2$ páros. A továbbiakban legyen n a feltételeknek megfelelő, 2-nél nagyobb egész. Ismeretes, hogy

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\dots(n-k+2)(n-k+1)}{k!}.$$

Ha $\binom{n}{1}=n$ páratlan, akkor $\binom{n}{2}=n\frac{n-1}{2}$ csak úgy lehet páratlan, ha $n-1$ páros, de nem osztható néggyel. Ha $n>4$, akkor tekintsük a $3\binom{n}{4}=\frac{n(n-1)}{2}\cdot(n-2)\frac{n-3}{4}$ számot. Ez páratlan, és $\frac{n(n-1)}{2}=\binom{n}{2}$ is, $n-2$ is páratlan egész, tehát $\frac{n-3}{4}$ is szükségképp egész. Ezért $n-3$ osztható néggyel. Ha most $n>2^l$, akkor hasonlóan a $(2^l-1)\binom{n}{2^l}$ páratlan egész, másrészt

$$(2^l-1)\binom{n}{2^l}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-2^l+3)}{(2^l-2)!}\cdot(n-2^l+2)\cdot\frac{n-2^l+1}{2^l}=$$
$$=\binom{n}{2^l-2}(n-2^l+2)\cdot\frac{n-2^l+1}{2^l}.$$

Itt a bal oldal és a jobb oldal első két tényezője páratlan egész, tehát 2^l osztója $(n-2^l+1)$-nek. Azt kaptuk, hogy valahányszor $2^l<n$, $(n-2^l+1)$-nek mindannyiszor osztója 2^l. Legyen 2^L a legnagyobb, n-nél kisebb kettőhatvány: $2^L<n<2^{L+1}$. Ilyen $L\geqq 1$ létezik, hisz n páratlan és $n\geqq 3$. Ekkor az imént bizonyítottak szerint 2^L osztója $(n-2^L+1)$-nek. De $n-2^L+1<2^{L+1}-2^L+1=2^L+1$ és $n-2^L+1>1$. Mivel 2^L az 1-nél nagyobb, és a (2^L+1)-nél kisebb számok közül csak önmagát osztja, ezért $2^L=n-2^L+1$, tehát $n=2^{L+1}-1$.

Azt kaptuk, hogy ha $\binom{n}{k}$ minden k-ra páratlan, akkor vagy $n=1$ vagy $n=2^{L+1}-1$ alakú, ahol $L\geqq 1$.

Most megmutatjuk, hogy a talált feltétel elégséges, azaz ha $n=2^{L+1}-1$ alakú, akkor

$$\binom{n}{k}=\binom{2^{L+1}-1}{k}=\frac{2^{L+1}-1}{1}\cdot\frac{2^{L+1}-2}{2}\cdot\frac{2^{L+1}-3}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2^{L+1}-k}{k}$$

minden $1\leqq k\leqq 2^{L+1}-1$ esetén páratlan.

S valóban: ha $1\leqq j\leqq 2^{L+1}-1$, akkor a fenti szorzat j-edik tényezője, $\frac{2^{L+1}-j}{j}$ olyan törtté egyszerűsíthető, amelynek számlálója is, nevezője is páratlan egész. Írjuk fel ugyanis j-t $2^m\cdot j'$ alakban, ahol $m\geqq 0$ egész és $j'>0$ páratlan. Minthogy $2^m\leqq j<2^{L+1}$, ezért $m\leqq L$. Következésképp

$$\frac{2^{L+1}-j}{j}=\frac{2^m(2^{L+1-m}-j')}{2^m j'}=\frac{2^{L+1-m}-j'}{j'}.$$

Itt j', s így $2^{L+1-m}-j'$ is páratlan egész, ahogy állítottuk.

$\binom{2^{L+1}-1}{k}$ tehát minden $1\leqq k\leqq 2^{L+1}-1$ esetén egész, másrészt olyan törtek szorzata, amelyeknek számlálója is, nevezője is páratlan. Ebből következik, hogy $\binom{2^{L+1}-k}{k}$ csak páratlan egész lehet. Végül $\binom{2^{L+1}-1}{0}=1$ is páratlan.

Beláttuk tehát, hogy $\binom{n}{k}$ pontosan akkor páratlan minden $0\leqq k\leqq n$-re, ha $n=2^m-1$ alakú, ahol $m\geqq 2$. ($L\geqq 1$ volt.) Végül $m=1$-re $n=2^1-1=1$ is megfelel, tehát a feladat feltételeinek pontosan azok az n számok felelnek meg, amelyek egy kettőhatványnál 1-gyel kisebbek: $n=1, 3, 7, \ldots, 2^m-1, \ldots$.

Megjegyzések. 1. A megoldás során gyakran használtuk a számelmélet alaptételét.

2. Ismeretes (1. KÖMAL F. 2507., 1986/1. sz. 3. o.), hogy $\binom{n}{k}$ pontosan akkor lesz minden $1\leqq k\leqq(n-1)$-re páros, ha n kettőhatvány. Most megmutatjuk, hogy ez az állítás egyenértékű a feladat megoldásában bizonyítottakkal. Belátjuk, hogy $\binom{n}{l}$ pontosan akkor lesz *minden* $0\leqq l\leqq n$-re páratlan, ha $\binom{n+1}{l}$ páros *minden* $1\leqq l\leqq n$-re. (Ebből a két állítás egyenértékűsége már következik.)

Ismert, hogy

$$\binom{n}{l-1}+\binom{n}{l}=\binom{n+1}{l},$$

ha $1 \leqq l \leqq n$. Ha minden $\binom{n}{l}$ páratlan ($0 \leqq l \leqq n$), akkor a bal oldalon két páratlan szám összege áll s az páros, tehát $\binom{n+1}{l}$ páros $1 \leqq l \leqq n$ esetén. Másrészt ha $\binom{n+1}{l}$ minden $1 \leqq l \leqq n$-re páros, akkor $\binom{n}{l-1}$ és $\binom{n}{l}$ minden $1 \leqq l \leqq n$-re ugyanazt a maradékot adja kettővel osztva, azaz egyforma paritású. Tehát $\binom{n}{0}$ és $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{1}$ és $\binom{n}{2}$, $\ldots$, $\binom{n}{n-1}$ és $\binom{n}{n}$ egyforma paritású, ami azt jelenti, hogy $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, $\ldots$, $\binom{n}{n}$ paritása megegyezik. Minthogy $\binom{n}{n} = 1$, ezért mindegyikük páratlan, ahogy állítottuk.

3. Az állítás hasonlóan bizonyítható a módosított Pascal-háromszöggel is, $\binom{n}{k}$ helyére 1-et vagy 0-t írva aszerint, hogy páratlan vagy páros. A módosított ("mod 2" számolt) Pascal-háromszög így néz ki (l. KÖMAL 1985/2. 51. o.):

1987-03-107-1.eps

(1. sor csupa 1-es;
2. sor csupa 1-es;
3. sor nem csupa 1-es;
:
:
2^k. sor csupa 1-es;
:
:
2^{k+1}. sor csupa 1-es)

Itt a „fenti" és a két „oldalsó, lenti" háromszög megegyezik. Az ábráról leolvasható, hogy a 2^k+1, 2^k+2, $\ldots$, $2^{k+1}-1$ sorok mindegyikében van nulla („középen"), míg a 2^{k+1}. sorban nincs. Tehát pontosan azokban a sorokban áll végig egyes, amelyek sorszáma kettőhatvány. Az n. sorban a k. helyen éppen az $\binom{n-1}{k-1}$ szám kettővel osztva kapott maradéka áll, vagyis ismét azt kaptuk, hogy $\binom{n}{k}$ akkor lesz minden $0 \leqq k \leqq n$-re páratlan, ha a módosított Pascal-háromszög$(n+1)$. sorában végig egyes áll, azaz ha $n+1$ kettőhatvány.

II. megoldás. A 2. megjegyzésben idézett állítás felhasználásával általában adunk szükséges és elegendő feltételt arra, hogy adott n és k esetén $\binom{n}{k}$ páratlan legyen.

Írjuk fel ehhez az n-et kettes számrendszerben, azaz legyen $n = 2^{a_r} + 2^{a_{r-1}} + \ldots + 2^{a_1}$, ahol $a_1 < a_2 < \ldots < a_r$, és tekintsünk egy n-elemű halmazt, amelynek minden elemét r darab szín valamelyikével festettük ki úgy, hogy az egyes színekből rendre 2^{a_1}, 2^{a_2}, $\ldots$, 2^{a_r} darab forduljon elő.

Az idézett állítás szerint tetszőleges $1 \leqq k' < 2^{a_i}$ esetén $\binom{2^{a_i}}{k'}$ páros, tehát az azonos színű elemek adott, k' elemszámú részhalmazai párokba rendezhetők. A kifestés után minden egyes csoportban rögzítsük ezeket a párosításokat is, mégpedig minden $1 \leqq k' < 2^{a_i}$ esetben.

Legyen most $0 \leqq k \leqq n$ tetszőleges és tekintsük az n-elemű halmaz $\binom{n}{k}$ darab k-elemű részhalmazát. Vegyük szemügyre azokat a k-asokat, amelyekhez van olyan szín – mondjuk az i-edik –, hogy mind az adott részhalmazban, mind pedig rajta kívül található i-színű elem. Hívjuk az ilyen k-asokat – az i színre nézve – *csonkának*. Megmutatjuk, hogy a csonka k-asok száma páros.

Tekintsük ehhez minden egyes ilyen k-ashoz a *legkisebb* olyan i-t, amelyre nézve csonka. Ha egy ilyen k-as a 2^{a_i} darab i-színű elem közül k' darabot tartalmaz, akkor nyilván $k' \leqq k$, másrészt a csonkaság miatt $0 < k' < 2^{a_i}$.

Feleltessük most meg ennek a csonka k-asnak azt a k-ast, amelyben az i-től különböző színű elemek ugyanazok, a k' darab i-színű elem helyére pedig az ennek a k'-elemű részhalmaznak a $\binom{2^{a_i}}{k'}$, darab i-színű k'-elemű részhalmazon rögzített párosításnak megfelelő részhalmaz kerül. Ez a megfeleltetés nyilván kölcsönösen egyértelmű, csonka k-ashoz tőle különböző csonka k-ast rendel, így a csonka k-asok száma valóban páros.

Ez azt jelenti, hogy $\binom{n}{k}$ paritása megegyezik az n elem közül kiválasztható *nem csonka* k-elemű részhalmazok számának a paritásával. Ha egy k-elemű részhalmaz nem csonka, akkor tetszőleges i-re vagy minden i-színű elemet tartalmaz vagy pedig egyet sem. Egy nem csonka k-elemű részhalmaz elemszáma tehát bizonyos egyszínű részhalmazok elemszámának, azaz *különböző 2-hatványoknak az összege.* Mivel tetszőleges k egyértelműen írható fel ilyen számok összegeként – ez éppen a k kettes számrendszerbeli alakja – ezért adott k esetén *legfeljebb egy* nem csonka részhalmaz létezhet és ez is csak akkor, ha minden olyan 2-hatvány, ami a k kettes számrendszerbeli alakjában szerepel, előfordul az n kettes számrendszerbeli alakjában is.

Azt kaptuk, hogy $\binom{n}{k}$ pontosan akkor páratlan, ha az n-et és a k-t kettes számrendszerben felírva mindazokon a helyiértékeken, ahol a k-ban 1-es áll, az n-ben is 1-es áll.

Feladatunk állítása innen nyilvánvalóan adódik, hiszen ha $\binom{n}{k}$ minden $0 \leqq k \leqq n$ esetén páratlan, akkor az n kettes számrendszerbeli alakja nem tartalmazhat 0 számjegyet.