Jelöljük a kúp alapkörének sugarát r-rel, magasságát m-mel, a kúp félnyílásszögét pedig α-val. Legyen még a gömb sugara R.

1986-12-440-1.eps

Az ábra alapján felírhatjuk a következő összefüggéseket:

$$r = m \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$
$$R = (m - R) \sin \alpha,$$

és ebből

$$R = \frac{m \cdot \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}.$$

Írjuk fel a gömb V_g, illetve a kúp V_k térfogatát:

$$V_g = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{m \cdot \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} \right)^3; \quad V_k = \frac{(m \cdot \operatorname{tg} \alpha)^2 \cdot \pi \cdot \mathrm{m}}{3}.$$

Feladatunk azt kérdezi, hogy mekkora lehet a $\frac{V_g}{V_k}$ hányados. A fentiek szerint

$$\frac{V_g}{V_k} = \frac{\frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{m \cdot \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} \right)^3}{\frac{(m \cdot \operatorname{tg} \alpha)^2 \cdot \pi \cdot \mathrm{m}}{3}} = \frac{4 \cdot \sin \alpha (1 - \sin \alpha)}{(1 + \sin \alpha)^2}.$$

Írjuk ezt a következőképpen:

(1) $$2 \cdot \frac{2 \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} \cdot \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}$$

és vegyük észre, hogy

(2) $$\frac{2 \cdot \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} + \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} = 1.$$

Mivel α hegyesszög, (1) második és harmadik tényezője pozitív, (2) szerint pedig e két tényező összege állandó. A jól ismert
$a \cdot b \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2$ egyenlőtlenség alapján

$$\frac{2 \cdot \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} \cdot \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} \leq \left(\frac{1}{2} \right)^2,$$

és itt pontosan akkor van egyenlőség – tehát (1) akkor maximális –, ha

$$\frac{2 \cdot \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}.$$

Ebből $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, és ilyenkor $\frac{V_g}{V_k} = \frac{1}{2}$.

Egy gömb a köréírt forgáskúpnak tehát legfeljebb a felét tölti ki.

Megjegyzés. A talált esetben a gömb középpontja egybeesik a kúp súlypontjával.