I. megoldás. Húzzunk párhuzamosokat az $ABCD$ négyszög csúcsain át a négyszög átlóival (1/a, b ábrák). Az így kapott P paralelogramma területe nyilván az $ABCD$ négyszög területének kétszerese, másfelől a P oldalai a négyszög átlóival egyenlők, P oldalainak szöge pedig a négyszög átlóinak szögével. Mivel a megadott $\mathbf{u}$, illetve $\mathbf{v}$ vektorokkal történő eltolások során az átlók állása nem változik, az $A'B'C'D'$ négyszöghöz hasonlóan elkészített paralelogramma a P-vel egybevágó, és így a két négyszög területe valóban egyenlő.

1987-02-068-1.eps

1.a ábra

1987-02-068-2.eps

1.b ábra

Megjegyzés. A fenti paralelogramma területe $e \cdot f \cdot \sin(e, f)$, ahol e és f a négyszög átlói, azaz tetszőleges – nem hurkolt – négyszög területének kétszerese az átlók és az átlók szöge szinuszának a szorzata. Ez az összefüggés háromszögre is érvényes és ilyenkor a jól ismert $t = \dfrac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma$ alakot ölti. (Az átlók a háromszög oldalaiba mennek át.)

Az alábbi változat teljes egészében a vektorok nyelvén írja le a fenti megoldást. Az ábrán $\mathbf{b}-\mathbf{c}$ javítandó $\mathbf{b}-\mathbf{a}$-ra.

1987-02-069-1.eps

2. ábra

II. megoldás. Fejezzük ki az $ABCD$ négyszög csúcsaihoz húzott $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ $\mathbf{d}$ helyvektorokkal az AB, AD és az AC vektorokat a 2. ábra szerint. Ezeknek a vektoroknak a vektoriális szorzatával a négyszög kétszeres területe kifejezhető :

$$2\mathbf{t} = (\mathbf{b}-\mathbf{a}) \times (\mathbf{c}-\mathbf{a}) + (\mathbf{c}-\mathbf{a}) \times (\mathbf{d}-\mathbf{a}),$$

ahol $\mathbf{t}$ olyan vektor, amelynek hossza t, merőleges a négyszög síkjára és a pozitív féltérbe mutat.

A vektoriális szorzat tulajdonságai alapján

$$\begin{aligned} 2\mathbf{t} &= (\mathbf{b}-\mathbf{a}) \times (\mathbf{c}-\mathbf{a}) - (\mathbf{d}-\mathbf{a}) \times (\mathbf{c}-\mathbf{a}) = \\ &= (\mathbf{b}-\mathbf{a}-\mathbf{d}+\mathbf{a}) \times (\mathbf{c}-\mathbf{a}) = (\mathbf{b}-\mathbf{d}) \times (\mathbf{c}-\mathbf{a}). \end{aligned} \tag{1}$$

Az (1) alapján az $A'B'C'D'$ négyszög kétszeres területvektora

$$2\mathbf{t}' = \big((\mathbf{b}+\mathbf{v}) - (\mathbf{d}+\mathbf{v})\big) \times \big((\mathbf{c}+\mathbf{u}) - (\mathbf{a}+\mathbf{u})\big) =$$

=(**b**-**d**)×($\mathbf{c}-\mathbf{a}$).(2)(1)-ből és (2)-ből pedig következik a feladat állítása.