I. megoldás. Hívjuk pozitív egész számok egy sorozatát „gazdaságosnak”, ha rendelkezik a feladatban leírt tulajdonsággal, tehát az elemeiből készíthető összegek között nincsenek egyenlők. Egy ilyen súlysorozat mérősúlyaival például nem mérhetünk egyenlő tömegeket, ha a súlyok különböző csoportjait helyezzük a súlyserpenyőbe. A 2 hatványok sorozata például nyilván gazdaságos, hisz bármely eleme nagyobb a nála kisebbek összegénél, de épp ez az oka annak, hogy ez a sorozat túl gyorsan növekszik: nyolcadik eleme, 2^7 már nagyobb, mint 100. A 2 hatványok azonban felhasználhatók 100-nál kisebb számokból álló gazdaságos sorozat készítésére.

A 2 első hat nem negatív kitevőjű hatványa, az 1, 2, 4, 8, 16, 32 sorozat tehát gazdaságos, az elemeiből készíthető összegek éppen az 1 és a $2^6-1=63$ közé eső egészeket adják. Ezért a 3-szorosaikból, a 3, 6, 12, 24, 48, 96 számokból képezett összegek között sincsenek egyenlők, és ezek az összegek éppen a 3 és a $3\cdot 63=189$ közé eső, 3-mal osztható számok.

Azt állítjuk, hogy ha ehhez a hat darab számhoz még hozzávesszük a 95 és a 97 számokat, akkor az így kapott 8-elemű sorozat még mindig gazdaságos marad. A már meglevőkön kívül ugyanis a következő új összegeket kaphatjuk :

1. A 97 szerepel bennük tagként, a 95 pedig nem; az ilyen összegek 1 maradékot adnak 3-mal osztva, és nyilván bármely kettő különböző.

2. A 95 szerepel bennük tagként, a 97 pedig nem ; az ilyen összegek 2 maradékot adnak 3-mal osztva, és közöttük sincsenek egyenlők.

3. Mind a két új szám, a 95 és a 97 is szerepel bennük tagként. Az ilyen összegek oszthatók 3-mal, de nem kisebbek, mint $95+97=192$; természetesen ezek az összegek is páronként különbözők.

Látható, hogy a két újabb szám hozzávételével létrejövő új összegek az eddigiektől és egymástól is különböznek és így a 3, 6, 12, 24, 48, 95, 96, 97 számok valóban a feladat egy megoldását adják.

Megjegyzés. Általában is igaz, hogy a 3, $3\cdot 2$, $3\cdot 2^2$, ..., $3\cdot 2^{k-1}$, $3\cdot 2^k-1$, $3\cdot 2^k$, $3\cdot 2^k+1$ sorozat gazdaságos. A következő megoldásból kiderül, hogy nem a legjobb abban az értelemben, hogy a sorozat legnagyobb eleme csökkenthető. Az alábbiakban megadunk egy elégséges feltételt arra, hogy egy 8-elemű sorozat gazdaságos legyen – a feltétel általában is megfogalmazható –, majd ezt felhasználva elkészítünk egy megfelelő sorozatot.

II. megoldás. Természetesnek tűnik, hogy kíséreljük meg előírni a létrejövő összegek nagyságviszonyát: az innen nyerhető feltételek remélhetőleg segítségünkre lesznek a sorozat konstrukciójában.

Próbáljuk meg tehát a készíthető összegeket a következőképpen rendezni:

a) ha két összeg különböző számú tagból áll, akkor legyen az a kisebb, amelyiknek kevesebb tagja van;

b) ha két összeg ugyanannyi tagból áll, akkor legyen az a kisebb, amelyikben – az esetleges közös tagok elhagyása után – a legkisebb tag kisebb.

Ha van ilyen számsorozat, akkor az nyilván gazdaságos, csak az nem világos, vajon teljesíthető-e a két feltétel egyidejűleg. Vegyük észre, hogy mindkét feltétel valahogyan azt biztosítja, hogy a sorozat elemei egymáshoz képest ne legyenek túl nagyok – például a legnagyobb elem kisebb, mint a két legkisebb összege –, várható tehát, hogy ezek révén sikerül 100-nál kisebb számokból álló megoldását találni a feladatnak.

Jelölje a sorozat elemeit nagyság szerint növekvő sorrendben $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_s$. Az elemek rendezése miatt a második feltétel teljesül, ha

$$a_i+a_8<a_{i+1}+a_{i+2},\qquad (1\leqq i\leqq 5); \tag{1}$$

$$a_i+a_7+a_8<a_{i+1}+a_{i+2}+a_{i+3},\qquad (1\leqq i\leqq 3); \tag{2}$$

$$a_i+a_6+a_7+a_8<a_{i+1}+a_{i+2}+a_{i+3}+a_{i+4},\qquad (i=1). \tag{3}$$

A fenti egyenlőtlenségek bal oldalán az a_i-t tartalmazó *legnagyobb*, jobb oldalán pedig az a_i-nél nagyobb elemeket tartalmazó *legkisebb* összegek állnak. A biztosan elhagyható közös tagok miatt a feltételt elegendő a legfeljebb négy tagú összegekre előírni. Ugyanez az oka az i-re vonatkozó megszorításoknak is, hisz például $i=2$-re (3) és (2) azonos, $i=4$-re pedig mindhárom feltétel az $a_4+a_8<a_5+a_6$ alakot ölti.

Vegyük észre még, hogy $i=1-$ re (3)-ból következik (2) – mert $a_5<a_6$ – $i=1$, 2, 3-ra pedig (2)-ből hasonlóan következik (1).

A sorozatnak először a három legnagyobb elemét, a_8-at, a_7-et és a_6-ot adjuk meg, ezután a_5 és a_4 kiválasztására (1)-et, a_3 és a_2 kiválasztására az erősebb (2)-t, a_1 kiválasztására pedig a még erősebb (3)-at használjuk.

Az első feltételhez szükséges, hogy a sorozat kis elemei se legyenek túl kicsik, ezért az öt legkisebb elem értékét az (1), (2), illetve (3) szerint lehetséges legnagyobbnak választjuk, azaz (1)-ből $i=5$-re és $i=4-$ re

$$a_5=a_6+a_7-a_8-1,\quad a_4=a_5+a_6-a_8-1:$$

(2)-ből $i=3$-ra és $i=2$-re

$$a_3=a_4+a_5+a_6-a_7-a_8-1,\quad a_2=a_3+a_4+a_5-a_7-a_8-1;$$

végül (3)-ból $i = 1$-re

$$a_1 = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - a_6 - a_7 - a_8 - 1. \tag{4}$$

Ekkor tetszőleges $a_8 > a_7 > a_6$ számokból kiindulva nyilván $a_6 > a_5 > a_4 > a_3 > a_2 > a_1$, másrészt így az egyenlő tagszámú összegek valóban különbözők lesznek.

Biztosítani kell még, hogy a sorozat elemei pozitív számok legyenek, továbbá természetesen a különböző tagszámú összegek rendezésére vonatkozó előírást. Ez utóbbi meglepő módon következik a látszólag kevesebbet állító

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > a_6 + a_7 + a_8 \tag{5}$$

feltételből; eszerint elegendő, ha csak arra figyelünk, hogy a *legkisebb* négy tagú összeg nagyobb legyen, mint a *legnagyobb* háromtagú.

Valóban, az elemek rendezése miatt

$$a_2 - a_8 < a_3 - a_7 < a_4 - a_6 < \underbrace{a_5 - a_5}_{0} < a_6 - a_4 < a_7 - a_3 < a_8 - a_2. \tag{6}$$

Ha most az itt felsorolt különbségeket nagyság szerint növekvő sorrendben rendre a_1 -hez adjuk, akkor minden lépésben a *legkisebb* k-tagú és a *legnagyobb* $(k-1)$-tagú összeg különbségét kapjuk, ha $k = 2, 3, \ldots, 8$. Ez a különbség (6) szerint az első három lépés során csökken, a negyedikben nem változik, attól fogva pedig nő, így a legkisebb k-tagú és a legnagyobb $(k-1)$-tagú összeg különbsége a $k = 3$ (és a $k = 4$) esetben minimális. Az (5) feltétel szerint pedig ez a minimum pozitív, így a legkisebb k-tagú összeg minden $2 \leqq k \leqq 8$ esetén nagyobb, mint a legnagyobb $(k-1)$-tagú. Az (5) feltétel tehát valóban biztosítja, hogy a különböző tagszámú összegek olyan módon legyenek rendezve, ahogyan azt előírtuk.

Ha most $a_7 = a_8 - 1,\ a_6 = a_8 - 2$, akkor a rekurziós formulák szerint $a_5 = a_8 - 4,\ a_4 = a_8 - 7,\ a_3 = a_8 - 13,\ a_2 = a_8 - 24,\ a_1 = a_8 - 46$. Az így definiált sorozatra pontosan akkor teljesül (5), ha $a_8 > 87$. Eszerint például $a_8 = 88$-ból kiindulva a

$$88,\ 87,\ 86,\ 84,\ 81,\ 75,\ 64,\ 42$$

sorozatot kapjuk; ez a sorozat a konstrukcióról bizonyítottak szerint megfelel a feladat előírásainak.

Megjegyzések. 1. Ha a sorozat értelmezését adó feltételeket kissé módosítjuk (az a_1-et (4) helyett elegendő a (2) szerinti $a_1 = a_2 + a_3 + a_4 - a_7 - a_8 - 1$ összefüggésből számolni, ugyanis ha a nyolc szám összege páratlan, akkor nyilván nem kaphatunk egyenlő négy tagú összegeket; másrészt – és ezt gondolja meg az olvasó – ha (5) helyett csak annyit írunk elő, hogy a legkisebb négy tagú összeg 1-gyel legyen ***kisebb*** a legnagyobb háromtagúnál, akkor még mindig nem lesznek egyenlők a különböző tagszámú összegek között), akkor a 84, 83, 82, 80, 77, 71, 60, 40 sorozatot kapjuk.

Számológéppel sem sikerült olyan 8-elemű gazdaságos sorozatot találni, ahol a legnagyobb elem 84-nél kisebb, bár a program nem nézett végig minden lehetőséget.

Az Sz. 55. feladatban olyan programot kellett írni, amely kétjegyű számokból álló gazdaságos sorozatot állít elő. A beküldött programok döntő többsége nem alkalmas a feladat valódi megoldására, hiszen – jó esetben – évekig futna. A szerzőket ez a tény nem látszott zavarni.

2. A probléma szoros kapcsolatban van az F. 2584. feladattal (a megoldást lásd az 1986. évi 7. szám 304. oldalán). Ott azt bizonyítottuk be, hogy két jegyű számokból álló 10-elemű gazdaságos sorozat nem létezik. Az ottani bizonyítás 9-elemű sorozatra nem működik, másfelől a mostani konstrukciók egyike sem ad 9-elemű gazdaságos sorozatot.