I. megoldás. Megmutatjuk, hogy az állítás minden egész n-re igaz. Írjuk fel $(a^4+b^4+c^4)$-et az alábbi alakban:

$$a^4+b^4+c^4=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=$$
$$=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-2\{(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)\}=$$
$$=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2+4abc(a+b+c)-2(ab+bc+ca)^2=$$
$$=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2+4abc(a+b+c)-2\left(\frac{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)}{2}\right)^2=$$
$$=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2+4abc(a+b+c)-\frac{(a+b+c)^4}{2}-$$
$$-\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{2}+(a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2).$$

Legyen tehát az n tetszőleges egész, s írjuk fel $n=2^km$ alakban, ahol $k\geqq 0$ egész, m pedig páratlan egész. Ez a felírás egyértelmű. A feltétel szerint n, s így m is osztója $(a+b+c)^2$-nek és $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$-nek. Minthogy m páratlan, ezért m osztója $\dfrac{(a+b+c)^4}{2}+\dfrac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{2}$-nek is. Az m tehát osztója a jobb oldal minden tagjának, így az egész jobb oldalnak is, tehát $m|a^4+b^4+c^4$.

Be kell még látni, hogy 2^k is osztója $a^4+b^4+c^4$-nek. Ha $k=0$, akkor nincs mit bizonyítani. Ha $k\geqq 1$, akkor a feltevés szerint n, s így 2^k is osztója $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2+4abc(a+b+c)+(a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2)$-nek.

Azt kell még igazolnunk, hogy $2^k \,\Big|\, \dfrac{(a+b+c)^4}{2}+\dfrac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{2}$. Mivel $(a+b+c)^4$ osztható 2^{4k}-nal is, így $\dfrac{(a+b+c)^4}{2}$ osztható 2^{4k-1}-nel is, tehát $4k-1>k$ miatt 2^k-nal is. Végül ugyanígy $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$ osztható 2^{2^k}-nal, a fele tehát 2^{2^k-1}-nel, s így $2k-1\geqq k$ miatt 2^k-nal is. A jobb oldalon tehát minden tag osztható 2^k-nal, így az összeg is osztható vele.

Azt kaptuk tehát, hogy m is, 2^k is osztója $(a^4+b^4+c^4)$-nek. De $(m,2^k)=1$, így $(a^4+b^4+c^4)$ osztható a szorzatukkal, $m\cdot 2^k=n$-nel is. Ezzel beláttuk hogy a feladat állítása minden egész n-re teljesül.

II. megoldás. Egy szerencsésebb átalakítással az állítást az n páros vagy páratlan voltától függetlenül is igazolhatjuk. Ugyanis

$$a^4+b^4+c^4=(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)-$$
$$-(a^3b+b^3c+c^3a+ab^3+bc^3+ca^3)=(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)-$$
$$-[(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)-(a^2bc+ab^2c+abc^2)]=$$
$$=(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)-(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)+$$
$$+(a+b+c)abc.$$

Látható, hogy a kapott háromtagú összeg minden tagjában az első tényező a feltétel szerint n-el osztható, így az összeg is.

Megjegyzés. A bizonyításból következik, hogy $n|a+b+c$ és $n|a^2+b^2+c^2$ esetén $n|a^{2^k}+b^{2^k}+c^{2^k}$ tetszőleges pozitív egész k-ra is.