I. megoldás. Legyenek a háromszög szögei α, β, γ. A feladat szövegéből következik, hogy egyik szög sem derékszög, mert tangenseik léteznek. A szögek betűzéséről feltehető, hogy $\operatorname{tg}\alpha \le \operatorname{tg}\beta \le \operatorname{tg}\gamma$. Ekkor csakis ebben a sorrendben alkothatnak számtani sorozatot, tehát

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma = 2\operatorname{tg}\beta. \tag{1}$$

Írjuk be mindkét oldalon a tangens definícióját és szorozzunk $\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma$-val. Kapjuk, hogy

$$\cos\,\beta(\sin\,\alpha \cdot \cos\,\gamma + \cos\,\alpha \cdot \sin\,\gamma) = 2 \cdot \sin\,\beta \cdot \cos\,\alpha \cdot \cos\,\gamma.$$

A bal oldalon a zárójelben az addíciós tétel szerint éppen $\sin(\alpha+\gamma)$ áll, s ez $\sin(\pi-\alpha-\gamma) = \sin\,\beta$-val egyenlő. $0<\beta<\pi$ miatt $\sin\,\beta \ne 0$, egyszerűsíthetünk vele, s így azt kapjuk, hogy

$$\cos\beta = 2\cos\alpha \cdot \cos\gamma. \tag{2}$$

Most belátjuk, hogy (2) ekvivalens azzal, hogy $\sin\,2\alpha$, $\sin\,2\beta$, $\sin\,2\gamma$ (ilyen sorrendben) számtani sorozatot alkot, tehát

$$\sin\,2\alpha + \sin\,2\gamma = 2 \cdot \sin\,2\beta. \tag{3}$$

A (3) bal oldalát szorzattá alakítjuk, majd felhasználjuk, hogy $\sin(\alpha+\gamma) = \sin\beta$, a jobb oldalon pedig a kétszeres szög szinuszára vonatkozó összefüggést használjuk. Így kapjuk, hogy

$$2 \cdot \sin\,\beta \cdot \cos(\alpha-\gamma) = 4 \cdot \sin\,\beta \cdot \cos\,\beta.$$

Egyszerűsítünk $2 \cdot \sin\beta$-val (ami nem 0), majd mindkét oldalból levonunk $\cos\beta$-t:

$$\cos(\alpha-\gamma) - \cos\,\beta = \cos\,\beta.$$

Tudjuk, hogy $-\cos\beta = \cos(\alpha+\gamma)$. Ha ezt beírjuk a bal oldalra, és alkalmazzuk az addíciós tételt, ekkor azt kapjuk, hogy

$$2 \cdot \cos\,\alpha \cdot \cos\,\gamma = \cos\,\beta,$$

ami nem más, mint (2).

Lépéseink megfordíthatók, így (2) valóban pontosan akkor igaz, ha $\sin 2\alpha$, $\sin 2\beta$, $\sin 2\gamma$ (ebben a sorrendben) számtani sorozat, és éppen ezt akartuk bizonyítani.

II. megoldás. Tegyük fel, hogy az ABC háromszög szögeire teljesül (1). Ekkor a háromszög nem lehet derékszögű, hiszen mindhárom szögének van tangense. Megmutatjuk, hogy ekkor a háromszög tompaszögű sem lehet. Ha ugyanis β tompaszög, akkor a másik két szög hegyes, és így $\operatorname{tg}\beta < 0$, $\operatorname{tg}\alpha > 0$ és $\operatorname{tg}\gamma > 0$, márpedig ekkor (1) nem állhat fönn. Ha viszont például α tompaszög, akkor (1) bal oldalát $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}(\beta+\gamma) + \operatorname{tg}\gamma$ alakba írva γ, $\beta+\gamma$ egyaránt 0 és $\pi/2$ közé esik, tehát $\operatorname{tg}(\beta+\gamma) > \operatorname{tg}\gamma$, s így a bal oldal negatív, míg $\operatorname{tg}\beta > 0$, hiszen α és β nem lehet egyszerre tompaszög.

1986-12-439-1.eps

Ha tehát (1) igaz, akkor az ABC háromszög hegyesszögű. Legyen O a köré írt körének középpontja, M a magasságpontja, T a B-ből induló magasságának talppontja és F az AC oldal felezőpontja (ábra). Ekkor M is, O is a háromszög belsejében van és $AMT\sphericalangle = BCA\sphericalangle = \gamma$, $CMT\sphericalangle = BAC\sphericalangle = \alpha$ (mert merőleges szárú szögek), tehát

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma = \frac{\mathrm{CT}}{\mathrm{TM}} + \frac{\mathrm{TA}}{\mathrm{TM}} = \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{TM}}.$$

Másrészt a kerületi és középponti szögek tétele miatt $AOC\sphericalangle = 2\beta$, így a fele, $AOF\sphericalangle = \beta$, tehát

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{AF}{FO} = \frac{AC}{2FO}.$$

(1) tehát a $\dfrac{CA}{TM} = \dfrac{AC}{FO}$ azaz $TM = FO$ alakba írható. Minthogy O és M AC-nek ugyanazon a partján van, és MT párhuzamos OF-fel (mindkettő merőleges AC-re), ezért azt kaptuk, hogy (1) pontosan akkor igaz, ha a hegyesszögű ABC háromszögben OM, a *háromszög Euler egyenese párhuzamos AC-vel.*

Az Euler-egyenesen az S súlypont is rajta van, s ennek távolsága AC-től $\frac{1}{3}BT = \frac{m_b}{3}$, ezért az Euler egyenes pontosan akkor párhuzamos AC-vel, ha $OF = \frac{m_b}{3}$ is fennáll. Az Euler egyenes párhuzamossága tehát egyenértékű azzal, hogy az AOC háromszög területe harmada az ABC háromszög területének:

$$3t_{AOC} = t_{ABC}. \tag{4}$$

Másrészt hegyesszögű háromszögben $t_{ABC} = t_{AOC} + t_{COB} + t_{BOA}$, ahonnan (4) szerint azt kapjuk, hogy

$$2t_{AOC} = t_{COB} + t_{BOA}. \tag{5}$$

Miután pedig $t_{AOC} = \frac{1}{2}r^2 \sin 2\beta$, $t_{COB} = \frac{1}{2}r^2 \sin 2\alpha$ és $t_{BOA} = \frac{1}{2}r^2 \sin 2\gamma$, az (5) egyenletet $\frac{r^2}{2}$-vel végigosztva, éppen a kívánt

$$2 \sin 2\beta - \sin 2\alpha + \sin 2\gamma$$

egyenlőséget kapjuk.

Megjegyzés. Könnyű belátni, hogy a bizonyítás lépései megfordíthatók, tehát hegyesszögű háromszögben az alábbi négy állítás ekvivalens:

1. $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \gamma = 2 \cdot \operatorname{tg} \beta$.
2. Az Euler-egyenes párhuzamos az AC oldallal.
3. $t_{AOB} + t_{BOC} = 2t_{AOC}$.
4. $\sin 2\alpha + \sin 2\gamma = \sin 2\beta$.

Nem nehéz megmutatni, hogy tompaszögű háromszögben e négy állítás egyike sem lehet igaz.