Mivel a lefedés egyenlő hosszúságú szakaszokkal is megoldható, nyomban ezt bizonyítjuk.

A lefedni kívánt ABC háromszög leghosszabb oldala (vagy ezek egyike) legyen AB. Az AB oldalhoz tartozó magasság T talppontja AB belső pontja. A lefedő szakaszok hosszát (d) e magasságéval megegyezőnek választjuk. A szakaszrendszer valamennyi elemének egyik végpontja az AB oldalra illeszkedik, másik végpontja pedig az AC vagy a BC oldalon van.

1987-04-150-1.eps

1. ábra

Mivel a csúcspontok hovatartozása az oldalakat illetően nem egyértelmű, a háromszög csúcsait lefedő szakaszokat külön adjuk meg. Az A csúcsot fedje az AC oldalon fekvő AD szakasz, a B csúcsot a BC oldalon fekvő BE szakasz, a C csúcsot pedig a CT magasságszakasz. (D és E az AC, ill. BC oldalnak az A, ill. B csúcstól d távolságra levő pontja. D és E létezik, mivel $AC > d$ és $BC > d$.) (1. ábra).

A lefedéshez diszjunkt szakaszok rendszerét kell megadnunk, ezért a lefedő szakaszok végpontjai kölcsönösen meghatározzák egymást. Így p1. ha a C csúcsot a CT szakasszal fedjük le, a T pont lefedésére ugyancsak a CT szakaszt írjuk elő.

A szakaszrendszer elemeinek AB-re illeszkedő, A-tól, B-től és T-től különböző végpontját a továbbiakban P_t, a másik végpontját R_t jelöli. R_t aszerint legyen az AC vagy a BC oldalon, hogy P_t az AT vagy a BT szakasz belső pontja.

1987-04-150-2.eps

2. ábra

E megszorítás mellett is előfordul, hogy valamely P_t-hez két megfelelő R_t pont található. Ezért kikötjük még, hogy az $R_tP_tT\sphericalangle$ legyen hegyesszög. Így már bármely P_t-hez egy és csak egy R_t tartozik. Messe ugyanis az AB oldalra P_t-ben állított merőleges az AC vagy BC oldalt K_t-ben. Mivel $K_tP_t < d < CP_t$, a K_tC szakasz egy és csak egy R_t pontot tartalmaz, amelyre $R_tP_t = d$ (2. ábra). Az $R_tP_tT\sphericalangle$ nyilván hegyesszög. Itt jegyezzük meg, hogy valamennyi R_t pont a DC vagy az EC szakasz belső pontja. Ha p1. P_t az AT szakasz belső pontja, az AP_tR_t háromszög P_t -nél fekvő belső szöge tompaszög. Ezért $AR_t > P_tR_t = d = AD.$ R_t nem eshet a C csúcsba sem, mivel $P_tC > d$.

Különböző P_t pontokhoz nem tartozhat ugyanaz az R_t pont, ellenkező esetben létrejönne olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek alapon fekvő szögei közül az egyik hegyesszög, a másik tompaszög volna. Így P_t és R_t kölcsönösen meghatározzák egymást.

A szakaszrendszer megadásánál tekintettel voltunk arra, hogy a háromszög határvonalának pontjaira egy és csak egy lefedő szakasz illeszkedjék; ahol szükséges volt, ezt be is bizonyítottuk. Már csak azt kell bizonyítanunk, hogy a háromszöglemez bármely belső pontján is egy és csak egy halad át szakaszaink közül.

Legyen először a vizsgált pont a CT magasság belső pontja. Ezen a CT magasság áthalad, más lefedő szakasz viszont nem, mivel a CT magasságon kívül minden lefedő szakasz benne van a CT egyenes által meghatározott félsíkok egyikében.

1987-04-151-1.eps

3. ábra

Tekintsük most az ATC háromszög valamely Q belső pontját (3. ábra). Állítsunk a Q ponton át merőlegest az AB oldalra. Ennek az ATC háromszögbe eső szakasza d-nél kisebb. A merőleges egyenest forgassuk a Q pont körül olyan irányba, hogy az AC egyenessel alkotott metszéspontja a C csúcshoz közeledjék. Az egyenesnek az ATC háromszögbe eső szakasza folytonosan és szigorúan monoton növekszik. (Ez egyszerűen belátható annak alapján, hogy tompaszögű háromszögben a tompaszöggel szemközti oldal a legnagyobb.) A QC egyenesnek a háromszögbe eső darabja már nagyobb d-nél. Ezért a mondott forgatás során az egyenes ACT háromszögbe eső szakasza egy és csak egy helyzetben lesz d hosszúságú. Ez a szakasz az általunk megadott szakaszrendszer eleme.

A BTC háromszög belső pontjaira ugyanígy végezhetjük a bizonyítást.

A feladat megoldását ezzel befejeztük.

Megjegyzés. A megoldásban lényegében azt használtuk fel, hogy egy *derékszögű háromszög* – az ATC , illetve a BTC – lefedhető a megadott módon a befogójával – a TC-vel – egyenlő hosszúságú szakaszokkal. Az alábbiakban egy korábbi feladat eredményét felhasználva igazoljuk ezt az állítást.

A 2316. gyakorlat megoldásában (lásd az 1986. novemberi számban, a 385–386. oldalon) megmutattuk, hogy egy $2r$ sugarú K kör kerületén, annak belsejében csúszás nélkül gördülő r sugarú k kör kerületének tetszőleges pontja a K egy átmérőjén mozog.

1987-04-151-2.eps

4. ábra

Tekintsük az ATC háromszöget a körülírt körével együtt – legyen ez a k kör – és foglaljuk ezt a kétakkora sugarú K körbe a 4. ábrán látható módon. Ekkor tehát az A pont a K középpontjába esik, a két kör pedig a C pontban érinti egymást.

Rögzítsük ebben a helyzetben az ATC háromszöget, a k kört pedig a CT húrjával együtt gördítsük a K kerületén addig a helyzetig, amíg a T pont – amely az idézett állítás szerint az AT átmérőn mozog – a kör középpontjába, A-ba jut.

Mivel a C pont eközben a CA átmérőn mozog, a k-val együtt mozgó CT húr éppen az előírt módon „söpri végig" az ATC háromszöget.