Bebizonyítjuk, hogy nem adhatók meg ilyen permutációk. Tekintsük az $S=\sum_{i=1}^{50} x_i y_i$ összegeket, ahol x_1, x_2, ..., x_{50}; y_1, y_2, ..., y_{50} az első 50 pozitív egész szám permutációi. Mivel S csak véges számú értéket vehet fel, ezek között van legnagyobb és legkisebb. Először is azt fogjuk belátni, hogy

1) a legnagyobb értéket akkor kapjuk, ha $y_i = x_i$, vagyis ha „nagyobb x_i-hez mindig nagyobb y_i tartozik";

2) a legkisebb értéket akkor kapjuk, ha $y_i = 51 - x_i$, vagyis ha „nagyobb x_i-hez mindig kisebb y_i tartozik".

Legyen ugyanis S' az az összeg, amely S-től csak abban tér el, hogy y_r és y_s „helyet cserélt" $(1 \le r \le s \le 50)$. E két összeg különbsége:

$$S' - S = x_r y_s + x_s y_r - x_r y_r - x_s y_s = (x_s - x_r)(y_r - y_s).$$

Ha $x_s > x_r$ és $y_r > y_s$, vagy $x_s < x_r$ és $y_r < y_s$, vagyis a csere során a nagyobbik x mellé nagyobb y került, akkor az összeg növekedett, ellenkező esetben pedig csökkent. Ilyen cserével az 1) pontban leírt összeg kivételével minden más összeg növelhető, a 2) pontban leírt összeg kivételével minden más összeg csökkenthető. Ebből következik, hogy az 1) pontban megadottól különböző összeg nem lehet maximális, és mivel maximális összeg létezik, ez éppen az 1)-beli. Hasonlóan adódik az állítás második része is.

Számítsuk ki ezek után S legnagyobb és legkisebb értékét. Az ismert

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

összefüggések alapján

$$S_{\max} = \sum_{i=1}^{50} i^2 = \frac{50 \cdot 51 \cdot 101}{6} = 42\,925,$$

$$S_{\min} = \sum_{i=0}^{50} i(51-i) = 51\sum_{i=1}^{50} i - \sum_{i=1}^{50} i^2 = \frac{51 \cdot 50 \cdot 51}{2} - 42\,925 = 22\,100.$$

Mivel $S_{\max} < 2S_{\min}$, a feladat kérdésére valóban nemleges a válasz, hiszen a kívánt egyenlőség bal oldalának legnagyobb értéke is kisebb a jobb oldal legkisebb értékénél.

Megjegyzés. Az S összegek minimumának és maximumának megállapításakor nagyon lényeges volt az a tény, hogy a szélsőértékek léteznek. Csupán abból, hogy egy adott T számhalmaz t elemeihez egyetlen egy t_0 elem kivételével megadható olyan t' elem, amelyre $t' > t$, még nem következik, hogy t_0 a T legnagyobb eleme.

Legyen például T a pozitív egész számok halmaza. Ekkor az 1 kivételével minden t számra $t' = t^2 > t$, az „eljárás" tehát az 1-től különböző számokat növeli. T legnagyobb eleme – *ha van* – tehát csak az 1 lehet; legnagyobb elem természetesen nem létezik, állításunk igaz, de semmitmondó.