I. megoldás. A 2500. feladat idézett megoldásában azt bizonyítottuk be, hogy ugyanilyen feltételek mellett 2^k darab érme esetén k méréssel választ adhatunk a feladat kérdésére. Az érmék száma most nem 2-hatvány, ezért az ott leírt felezési eljárás közvetlenül nem alkalmazható.

Hívjuk érmék egy H halmazát *vegyesnek*, ha mindkét fajta, a könnyebb és nehezebb is előfordul benne. A 2500. feladat megoldásában azt használtuk fel, hogy ha érmék egy $2n$ elemű H csoportját két n elemű részre osztva a részek egyforma nehezek, akkor mindkét rész ugyanolyan típusú, mint a H, míg ha nincs egyensúly – ekkor persze H vegyes –, akkor bárhogyan is osztjuk újabb két-két, egyenként n_1 és n_2 elemű csoportra a két n elemű részt ($n_1+n_2=n$), nem lehet, hogy mind az n_1, mind pedig az n_2 elemű részek egyforma súlyúak legyenek, hisz ekkor a teljes, n elemű csoportok összehasonlításakor is egyensúlyt kellett volna tapasztalnunk. Az n_1 vagy pedig az n_2 elemű részeket lemérve tehát mindenképpen lesz olyan H' és H'' csoportunk, hogy H' és H'' ugyanannyi – n_1 vagy n_2 – elemből áll, H' és H'' együttese vegyes, és azt is tudjuk, hogy H' és H'' közül melyik a könnyebbik. Erre a mérésre tetszés szerint választhatjuk az n_1 vagy pedig az n_2 elemű részeket, ha nincs egyensúly, akkor H' és H'' a két lemért csoport, ellenkező esetben pedig a megmaradó kettő. A 2500. feladat megoldásában $n_1=n_2=n/2$ volt, hiszen a vizsgált érmék száma az eljárás minden lépésében 2-hatvány volt, azaz felezhető.

A fentieket előrebocsátva, megadunk egy eljárást, amelynek révén 7 mérés elegendő a feladat kérdésének megválaszolásához. A 2500. feladat állítása szerint ennyi mérés még $2^7=128$ érme esetén is elegendő, a látszólagos többletet arra használjuk, hogy az eljárás egy adott pontján az eredeti, 100 éremből álló csoporttal azonos típusú és immár 2-hatvány elemből álló részt állítsunk össze.

Jelölje a 100 éremből álló halmazt H_{100}. Elsőre most is felezzük, azaz $50-50$ érmét hasonlítsunk össze. Ha egyensúly van, akkor mindkét 50-es csoport H_{100}-zal azonos típusú és az egyikből 14 darabot a másikhoz téve $2^6=64$ éremből álló, H_{100}-zal azonos típusú halmazhoz jutunk. Ennek vizsgálatára éppen elegendő a még hátralevő 6 mérés.

Ha az első mérés után nincs egyensúly, akkor H_{100} természetesen vegyes, és így a két rész is az. Legyen most $n_1=18$, ekkor $n_2=32$, és osszuk mindkét 50-es csoportot egy-egy 18, illetve 32 elemű részre. Hasonlítsuk össze például a 18 elemű halmazokat. Ha ezek egyforma nehezek, akkor legyen H' és H'' a két nem mért, 32 elemű halmaz. H' és H'' közül most ismerjük a könnyebbiket, még 5 mérés van hátra. Így a 2500. feladat szerint felezve, az ötödik mérés után a kezünkben van egy könnyebb és egy nehezebb érme.

Ha viszont a két 18 elemű csoport különböző súlyú, akkor újabb, $n_1=2$ és $n_2=16$ választással az n_1 vagy pedig az n_2 elemű részek lemérése után – és így 4 méréssel a befejezés előtt – vagy egy-egy $n_1=16=2^4$ elemű H' és H'' csoportunk van, vagy pedig egy-egy 2 elemű. Mindkét esetben tudjuk, hogy a két csoport közül melyik a könnyebb, így az első esetben még 4, a másodikban pedig 1 újabb mérés elegendő egy könnyebb és egy nehezebb érme kiválasztásához.

Láttuk tehát, hogy minden esetben elegendő legfeljebb 7 mérés a feladat kérdésének megválaszolásához.

II. megoldás. Az első megoldás módszerével általában is igazolhatjuk, hogy ha $N\leqq 2^k$, akkor N érme esetén legfeljebb k méréssel választ adhatunk a feladat kérdésére. Ehhez először belátjuk az alábbi (1) állítást:

(1) *Ha H_1 és H_2 olyan n elemű (érmékből álló) halmazok, hogy $n\leqq 2^k$ és H_1-ről tudjuk, hogy könnyebb H_2-nél, akkor a vegyes $H_1\cup H_2$ halmazból legfeljebb k méréssel kiválasztható egy könnyebb és egy nehezebb érme.* A bizonyítást a k-ra vonatkozó teljes indukcióval végezzük.

Ha $k=0$, akkor $n=1$, H_1 és H_2 egy-egy éremből áll, az állítás nyilvánvaló.

Legyen most $k>0$ és $n\leqq 2^k$. Ha $n\leqq 2^{k-1}$. is fennáll, akkor az indukciós feltevés szerint legfeljebb $k-1$ mérés is elegendő, így föltehető, hogy $n>2^{k-1}$. Legyen most $n_1=2^{k-1}$, $n_2=n-n_1$ – ekkor nyilván $n_2\leqq 2^{k-1}$ – és osszuk H_1-et és H_2-t az n_1 és n_2 elemű H_1' és H_1'', illetve H_2' és H_2'' részekre.

Mérjük meg ezután az n_1 elemű H_1'-t és H_2'-t. Akár egyensúlyban vannak, akár nem, a mérés eredményeként egy-egy legfeljebb 2^{k-1} elemű halmazhoz jutunk, amelyek viszonyát ismerjük, így az indukciós feltevés szerint további, legfeljebb $k-1$ méréssel kiválaszthatunk egy könnyebb és egy nehezebb érmét. Ezzel az (1) állítás bizonyítását befejeztük.

Térjünk most rá az eredeti állítás bizonyítására. Ismét a k-ra vonatkozó teljes indukcióval okoskodunk. Ha $k=0$, akkor $N=1$, az állítás semmitmondó, $k=1$ esetén pedig $N=2$, ilyenkor 1 mérés nyilván elegendő. Legyen most $k>1$ és $N\leqq 2^k$. Az indukciós föltevés miatt $N>2^{k-1}$ nyilván föltehető.

Ha az N páros, akkor felezzünk és hasonlítsuk össze a két, egyenként $N/2\leqq 2^{k-1}$ éremből álló halmazt. Ha egyensúly van, akkor a két rész ugyanolyan típusú, mint az eredeti N elemű halmaz, és az indukciós feltevés szerint bármelyikük legfeljebb $(k-1)$ méréssel megvizsgálható. Ha pedig nincs egyensúly, akkor a kiindulási halmaz vegyes, a két, legfeljebb 2^{k-1} elemű rész viszonyát ismerjük, így az (1) állítás szerint legfeljebb $k-1$ méréssel kiválasztható egy könnyebb és egy nehezebb érme.

Ha az N páratlan, akkor nyilván $N<2^k$. Tegyünk félre egy érmét, a maradékot pedig felezzük meg. Egy rész ilyenkor $N_1=\dfrac{N-1}{2}<2^{k-1}$ elemből áll. Ha a két részt megmérve nincs egyensúly, akkor az (1) állítás szerint egy könnyebb és egy nehezebb érme kiválasztása legfeljebb $k-1$ további méréssel lehetséges. Ha egyensúly van, akkor a két rész egyforma típusú és ha egyikükhöz hozzávesszük a félretett érmét, akkor ez az $N_1+1=\dfrac{N+1}{2}\leqq 2^{k-1}$ éremből álló halmaz az eredeti, N eleművel lesz azonos típusú, másrészt az indukciós feltevés szerint legfeljebb $k-1$ további méréssel megvizsgálható.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzés. A II. megoldásból könnyű algoritmust kiolvasni a feladat megoldására. Ez $N=100$-ra némiképpen különbözik az I. megoldásban talált eljárástól, azt lehet mondani, hogy az első megoldás a lehető leghamarább, a második pedig a lehető legkésőbb egészíti ki 2 hatvánnyá a vizsgált érmék számát. A megoldást szolgáltató méréssorozat tehát általában nem egyértelmű – bár 2^k darab érmére valószínűleg az –, azonban könnyű utánagondolni, hogy a talált eljárások során, ha $2^k < N \leqq 2^{k+1}$, akkor a legrosszabb esetben mindig sor kerül $k+1$ mérésre. A fentiekből azonban nem következik, hogy ez a szám nem csökkenthető.