I. megoldás. Be fogjuk látni, hogy tetszés szerinti számú, megfelelő e egyenest lehet megadni. Másképpen mondva: lehetne további követelményt is előírni az e egyenesre, például azt, hogy az egyik adott egyenest, a-t, egy előírt P pontban messe. P-ként a-nak csak két különleges helyzetű pontját nem választhatjuk.

1986-12-437-1.eps

1. ábra

Legyen a kocka alaplapja $ABCD$, oldalélei AE, BF, CG, DH és válasszuk a három, páronként kitérő élegyenes szerepére $AB=a$-t, $FG=b$-t és $DH=c$-t (1. ábra). Legyen a-nak A-tól és B-től különböző, egyébként tetszőleges pontja P. Így a P pont és a b egyenes meghatározta S sík biztosan metszi c-t, nem lehet párhuzamos vele. Ha ugyanis S-et b körül forgatjuk, ez csak abban a helyzetben párhuzamos c-vel, amikor tartalmazza a c-vel párhuzamos GC egyenest, tehát ha S azonos a kocka $GCBF$ lapsíkjával, ennek viszont a-val közös pontja a kizárt B csúcs.

Jelöljük S és c közös pontját Q-val. Ekkor PQ egyenes mindig megfelel e szerepére, amihez csak azt kell belátnunk, hogy a PQ egyenes b-t is metszi. Mivel P is, Q is benne van az S síkban, elegendő megmutatnunk, hogy PQ nem lehet párhuzamos b-vel. Az előbbihez hasonlóan okoskodunk. Minden olyan egyenes, amely párhuzamos b-vel és metszi c-t, benne van az $EHDA$ lapsíkban, amelyet egyrészt c, másrészt a b-vel párhuzamos EH egyenes határoz meg. PQ csak akkor volna párhuzamos b-vel, ha azonos lenne az AD egyenessel, ezt pedig szintén kizártuk azzal, hogy P különböző A-tól.

P-t végigfuttatva az AB egyenesen, a két kizárt esettől eltekintve mindig megfelelő PQ egyenest kapunk.

Megjegyzés. Nem használtuk ki, hogy az egyeneseinket szolgáltató kocka 3 éliránya páronként merőleges egymásra, sem azt, hogy a kitérő párok közti legrövidebb távolságok (normáltranszverzálisok) egyenlő hosszúak. Lényegében ugyanígy megy a megoldás tetszőleges három, páronként kitérő egyenes esetében, amilyenek például a Gy. 2373. gyakorlat a_1, a_2, a_3 egyenesei.

II. megoldás. Elegendő megadnunk egyetlen megfelelő egyenest. Az előbbi jelöléseket használjuk. Vetítsük az a, b, c egyeneseket merőlegesen az $ABCD$ lap síkjára, a vetülete önmaga, b-é a BC egyenes, c-é pedig a D pont. Tükrözzük D-re a-t, legyen a képe a', és messe ez BC-t K-ban, továbbá legyen K őse a tükrözésben az L pont (2. ábra). Vetítsük most „vissza” K-t b-re, így kapjuk az M pontot. Az LKM háromszög LK oldalának felezőpontja éppen D, így DH e háromszög egyik középvonalának egyenese, tehát metszi az LM oldalt (N pont). Ez pedig azt jelenti, hogy az LM egyenes megfelelő, hiszen az a, b, c egyenesek mindegyikét metszi.

1986-12-437-2.eps

2. ábra