I. megoldás. Megmutatjuk, hogy a válasz tagadó, a 2 hatványainak *első* jegyéből készített sorozat nem periodikus. Tegyük fel, hogy mégis létezik ilyen periódus és a hossza d. Ez azt jelenti, hogy a 2^1, 2^{1+d}, 2^{1+2d}, ..., 2^{1+nd}, ... sorozatban minden hatvány ugyanazzal a jeggyel kezdődik, mégpedig $2^1=2$ miatt kettessel. Ha egy szám első jegye 2, akkor a fele csakis 1-gyel kezdődhet, így a 2^0, 2^d, 2^{2d}, ..., 2^{nd}, ... sorozat tagjainak 1 a legelső számjegye.

Van tehát olyan pozitív egészekből álló a_n sorozat, hogy minden $n \geqq 1$ esetén

$$10^{a_n} < 2^{nd} < 2\cdot 10^{a_n}. \tag{1}$$

Mivel a jobb oldalon $2\cdot 10^{a_n} < 10^{1+a_n}$, ezért $1+a_n$ nyilván éppen 2^{nd} jegyeinek a száma. Megjegyezzük még, hogy (1)-ben nyilván nem állhat egyenlőség.

Belátjuk, hogy ha (1) fönnáll, akkor a 2^{nd} sorozatban a jegyek száma mindig ugyanannyival, a_1-gyel növekszik. Írjuk fel ugyanis az (1) egyenlőtlenséget $n=1$-re: $10^{a_1} < 2^d < 2\cdot 10^{a_1}$. Ezt az (1) egyenlőtlenséggel összeszorozva kapjuk, hogy

$$10^{a_n+a_1} < 2^{(n+1)d} < 4\cdot 10^{a_n+a_1} < 10^{1+a_n+a_1}.$$

Innen $2^{(n+1)d}$ jegyeinek száma $1+a_{n+1}=1+a_n+a_1$, azaz $a_{n+1}=a_n+a_1$, ahonnan valóban $a_n=na_1$ adódik.

Ha tehát a feltevésben kimondott állítás igaz, akkor a 2^d, 2^{2d}, ..., 2^{nd}, ... sorozatban a jegyek száma mindig ugyanannyival – a_1-gyel – nő. Megmutatjuk, hogy ez lehetetlen.

Az (1) egyenlőtlenséget átírva kapjuk, hogy

$$1 < \frac{2^{nd}}{10^{a_n}} < 2 \tag{2}$$

minden $n \geqq 1$ esetén, tehát $n=1$-re is, azaz

$$1 < \frac{2^d}{10^{a_1}} < 2. \tag{3}$$

Mivel (2)-ben $\dfrac{2^{nd}}{10^{a_n}} = \left(\dfrac{2^d}{10^{a_1}}\right)^n$, hisz $a_n=na_1$, ezért egy (3) szerint 1-nél nagyobb szám, $2^d 10^{a_1}$ hatványai kivétel nélkül 1 és 2 között vannak. Ez viszont nem lehet, 1-nél nagyobb szám hatványainak sorozata nem korlátos felülről.

A kapott ellentmondás azt jelenti, hogy az (1)-beli a_n sorozat nem létezhet, az első jegyek sorozata valóban nem periodikus.

Megjegyzés. A fenti megoldás közvetlenül még nem cáfolja az úgynevezett „vegyes periódus” létezését, vagyis az eddigiek alapján még lehetséges, hogy a 2 hatványok első jegyének sorozata csak egy adott k_0 kitevőtől kezdve periodikus. Az alábbiakban egy általános számelméleti eredmény fel használásával megmutatjuk, hogy a 2-hatványok első jegyének sorozatában ilyen vegyes periódus sem létezik.

II. megoldás. Tegyük fel, hogy létezik olyan k_0 kitevő, ahonnan kezdve periodikusan ismétlődik a 2-hatványok első jegye, és legyen a feltételezett periódus hossza ismét d. Ez azt jelenti, hogy a 2^{k_0+nd} alakú számok első jegye minden $n \geqq 0$ esetén ugyanaz; jelöljük ezt a számjegyet t-vel.

Tetszőleges pozitív N számot normál alakban írva

$$N = 10^{\lg N} = 10^{[\lg N]+\{\lg N\}} = 10^{[\lg N]}\cdot 10^{\{\lg N\}}.$$

Az N első számjegyét nyilván a második tényező – ami 1 és 10 közé esik – első jegye határozza meg, ami nem más, mint a második tényező egész része. Az N szám első jegye így $[10^{\{\lg N\}}]$.

Mivel $\lg 2^{k_0+nd} = (k_0+nd)\cdot \lg 2$, így feltevésünk szerint minden $n \geqq 0$ esetén

$$[10^{\{(k_0+nd)\cdot \lg 2\}}] = t,$$

azaz

$$t \leqq 10^{\{(k_0+nd)\cdot \lg 2\}} < 1+t,$$

ami akkor és csak akkor igaz, ha

$$\lg t \leqq \{(k_0+nd)\cdot \lg 2\} < \lg(1+t). \tag{4}$$

A (4) eredmény szerint a $(k_0+nd)\cdot\lg 2$ alakú számok mindegyikének a törtrésze a $[0,\,1)$ intervallum egy adott részébe, a $[\lg t,\ \lg(1+t))$ intervallumba esik. Az alábbiakban belátjuk, hogy ez lehetetlen, és ez azon múlik, hogy $\lg 2$ irracionális szám. Igaz ugyanis, hogy ha α tetszőleges *irracionális* szám, akkor a $[0,\,1)$ intervallum *minden* részintervalluma tartalmaz $\{(k_0+nd)\alpha\}$ alakú számot, bármilyen pozitív egészek legyenek is a k_0 és a d. Az alábbiakban vázoljuk ennek a tételnek a bizonyítását.

Tekintsünk egy P_0 kezdőpontú félegyenest és ezen a P_1, P_2, $\ldots$, P_n, $\ldots$ pontokat úgy, hogy $P_nP_{n+1} = d\alpha$ legyen ($\alpha > 0$ nyilván föltehető). Az így skálázott félegyenes érintsen a P_0 pontban egy egységnyi kerületű kört, amelyre a P_0 érintési pontból negatív irányba mérjük rá a $\widehat{P_0O} = \{k_0\alpha\}$ hosszúságú ívet (l. az ábrát).

1987-01-024-1.eps

Ha most a félegyenest „föltekercseljük" a körre, akkor a P_n pontok Q_n megfelelőire az $\widehat{OQ_n}$ ív hossza nyilván $\{(k_0 + nd)\alpha\}$. Azt fogjuk megmutatni, hogy bárhogyan adunk meg a körön egy I ívet, ez tartalmaz a belsejében Q pontot.

Mivel az α irracionális, a Q_n pontok közül semelyik kettő nem esik egybe. Ebből következik, hogy van köztük olyan kettő – mondjuk Q_r és Q_s –, amelyekre a $\widehat{Q_rQ_s}$ ív rövidebb a megadott I ívnél. Nyilván $\widehat{Q_rQ_s} = \widehat{Q_{r-1}Q_{s-1}} = \widehat{Q_{r-2}Q_{s-2}} = \ldots$, ezért van olyan Q_m pont – $m = |\, r - s \,|$ megfelelő –, amelyre $Q_rQ_s = P_0Q_m$, azaz a Q_m pont már a P_0-hoz van az adott I ív hosszánál közelebb. Így viszont a Q_m, Q_{2m}, $\ldots$, Q_{Im}, $\ldots$ pontokon „lépegetve" az I hosszánál rövidebb lépésközzel haladunk a körvonal mentén mindig ugyanabba az irányba – biztosan lesz tehát osztópont az I ív belsejében is.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzések. 1. A második megoldásban bizonyított állítás lényegében azzal egyenértékű, hogy irracionális α szám esetén a $(0,\ 1)$ intervallum *bármely* részintervalluma tartalmaz $\{n\alpha\}$ alakú számot – és így nyilván végtelen sokat tartalmaz –, az $\{n\alpha\}$ alakú számok tehát a $(0,\ 1)$ intervallum egy sűrű halmazát alkotják. (Ez nyilván nem igaz, ha az α racionális.) Ennél több igaz, nevezetesen, hogy irracionális α esetén az $\{n\alpha\}$ alakú számok „egyenletesen" helyezkednek el a $(0,\ 1)$ intervallumban; egy tetszőleges adott $I = (a,\ b)$ részintervallumba a sorozatnak körülbelül az I hosszával, $(b-a)$-val arányos mennyiségű eleme esik. Pontosabban szólva, ha a sorozat első n darab eleme közül $I(n)$ darab esik az I intervallumba, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{I(n)}{n}$ létezik és éppen $\dfrac{1}{b-a}$-val egyenlő. Az ilyen tulajdonságú sorozatokat *modulo* 1 *egyenletes eloszlásúnak* mondjuk.

2. A második megoldásból kitűnik, milyen nagy szerepe van a bizonyításban annak, hogy $\lg 2$ irracionális szám. Könnyen látható, hogy ha a 2 hatványait például 4-es számrendszerben írjuk fel ($\log_4 2 = \dfrac{1}{2}$, racionális), akkor az első jegyek rendre 2, 1, 2, 1, $\ldots$, a sorozatnak 2 hosszúságú periódusa van. Általában is egyszerűen adódik, hogy ha $\log_g m$ racionális, akkor az m hatványait g alapú számrendszerben felírva, az első jegyek periodikusan ismétlődnek.