Mivel a bal oldal értéke nem függ az a, b, c, d, e számok előjelétől, a jobb oldal pedig nem csökken, ha mindegyik előjelét pozitívra változtatjuk, elég a fenti egyenlőtlenséget pozitív a, b, c, d, e számokra bizonyítani.

A négyzetes és a számtani közép közti egyenlőtlenséget kétszer, vagy a negyedik hatványközép és számtani közép közti egyenlőtlenséget felhasználva:

$$N=\sqrt[4]{\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^4+\left(\frac{b}{c}\right)^4+\left(\frac{c}{d}\right)^4+\left(\frac{d}{e}\right)^4+\left(\frac{e}{a}\right)^4}{5}}\geq\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{e}+\frac{e}{a}}{5}=A. \tag{1}$$

Másrészt a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség szerint a *pozitív* $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{d}{e}$, $\frac{e}{a}$ számokra:

$$A=\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{e}+\frac{e}{a}}{5}\geq\sqrt[5]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{e}\cdot\frac{e}{a}}=1. \tag{2}$$

Azt kaptuk tehát, hogy $N\geq A\geq 1$. Ezekkel a jelölésekkel a bizonyítandó állítás az

$$5\,N^4\geq 5\,A$$

alakba írható. De $N\geq 1$, mint láttuk, így $N^4\geq N$, másrészt (1) szerint $N\geq A$, tehát

$$N^4\geq N\geq A,\qquad\text{és így}\qquad N^4\geq A,$$

azaz $5\,N^4\geq 5\,A$ valóban. Egyenlőség pontosan akkor van, ha

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e}=\frac{e}{a},\qquad\text{azaz}\qquad a=b=c=d=e.$$

Megjegyzés. A feladat nyilván általánosítható: ha k, n pozitív egészek, k páros, akkor

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^k\geq\sum_{i=1}^{n}x_i,$$

feltéve, hogy $x_1x_2\ldots x_n=1$.