

Legyen az  $A_1B_1C_1$  háromszög területe  $t$ , az  $ABC$  háromszögé  $T$ , a csonka gúla magassága  $m$ .

1986-11-373-1.eps

Ismeretes, hogy a csonka gúla alapjai hasonlóak, és a hasonlóság aránya  $\sqrt{t/T}$ . Ugyancsak hasonlóak az  $ABCP$  és  $A_1B_1C_1Q$  tetraéderek, hiszen alapjaik pl. a csonka gúla  $ABC$  és  $A_1B_1C_1$  „párhuzamos helyzetű” alapjai, oldaléleik pedig  $Q$  származtatása révén párhuzamosak, továbbá a  $Q$  pont az  $A_1B_1C_1$  sík  $A, B, C$ -vel ellentétes oldalán van. A hasonlóság aránya itt is  $\sqrt{t/T}$ . E két tetraéder közül az előbbi magassága  $m$ , így az utóbbié  $m \cdot \sqrt{t/T}$ . Ezért az  $ABCQ$  tetraéder magassága  $m + m \cdot \sqrt{t/T}$ , tehát térfogata  $T(m + m \cdot \sqrt{t/T})/3 = m(T + \sqrt{Tt})/3$ .

Az  $ABB_1A_1C$  gúla térfogata a csonka gúla  $m(t + \sqrt{t/T} + T)/3$  és az  $A_1B_1C_1C$  tetraéder  $tm/3$  térfogatának különbsége, vagyis  $m(t + \sqrt{Tt} + T)/3$ . Tehát a két test térfogata valóban egyenlő.

*Megjegyzés.* A feladatban leírt csonka gúla speciális esetben hasáb, és ekkor nem egészíthető ki gúlvá. A közölt megoldásban nem használtuk ki a gúla csúcsának létezését, amint azt számos megoldónk tette.